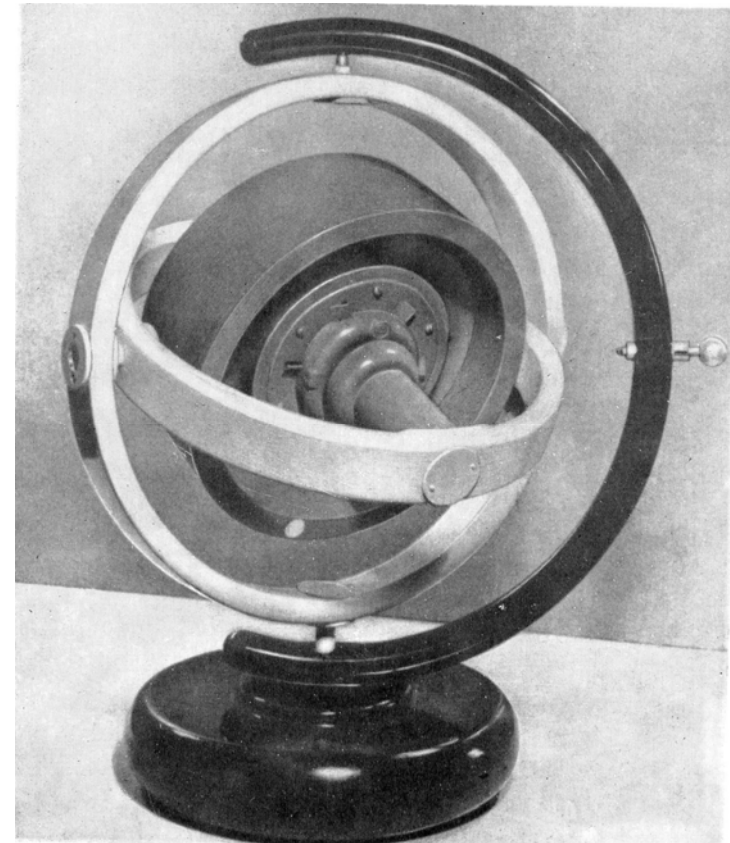
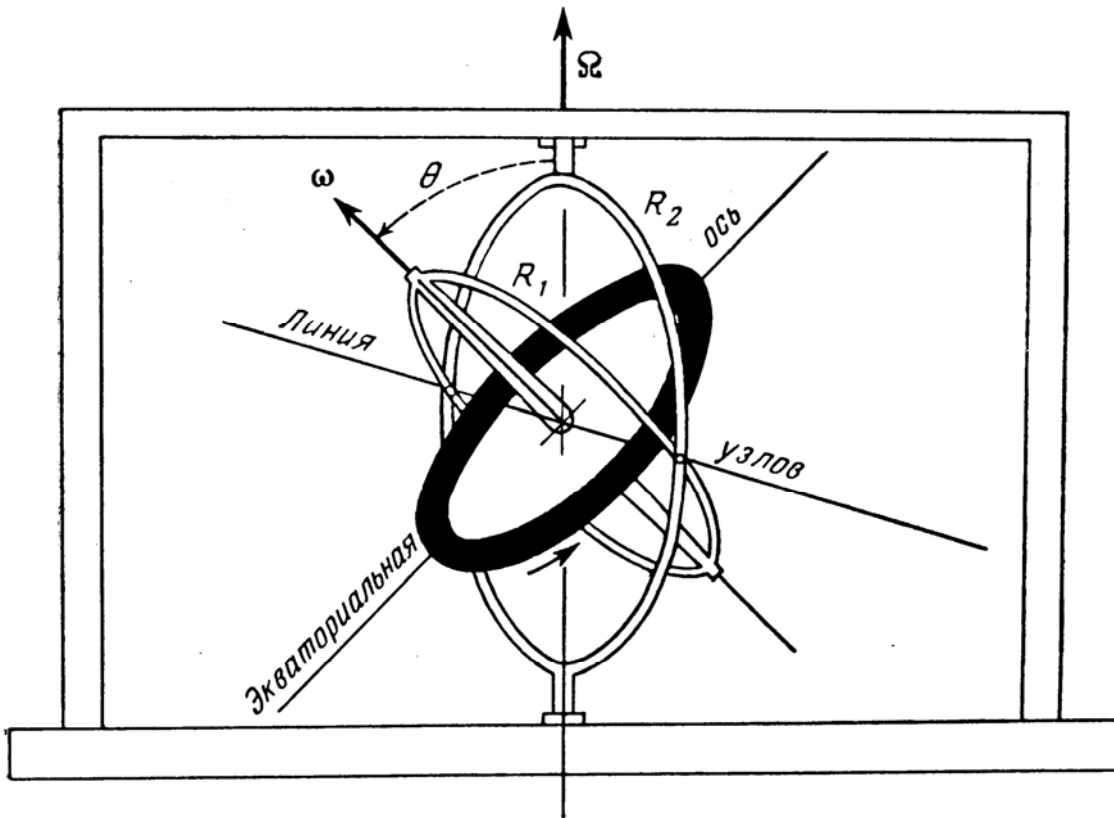


# Гироскоп

*В широком смысле:* гироскоп – это твердое тело, способное вращаться с большой угловой скоростью, направление которой изменяется незначительно.

*В более узком смысле:* гироскоп – это устройство, изображенное на рисунках.



# Гирскопический эффект, создаваемый вагонными колесами, движущимися по кривой

Гирскопический момент: 
$$K = \frac{CV^2}{Rr}$$

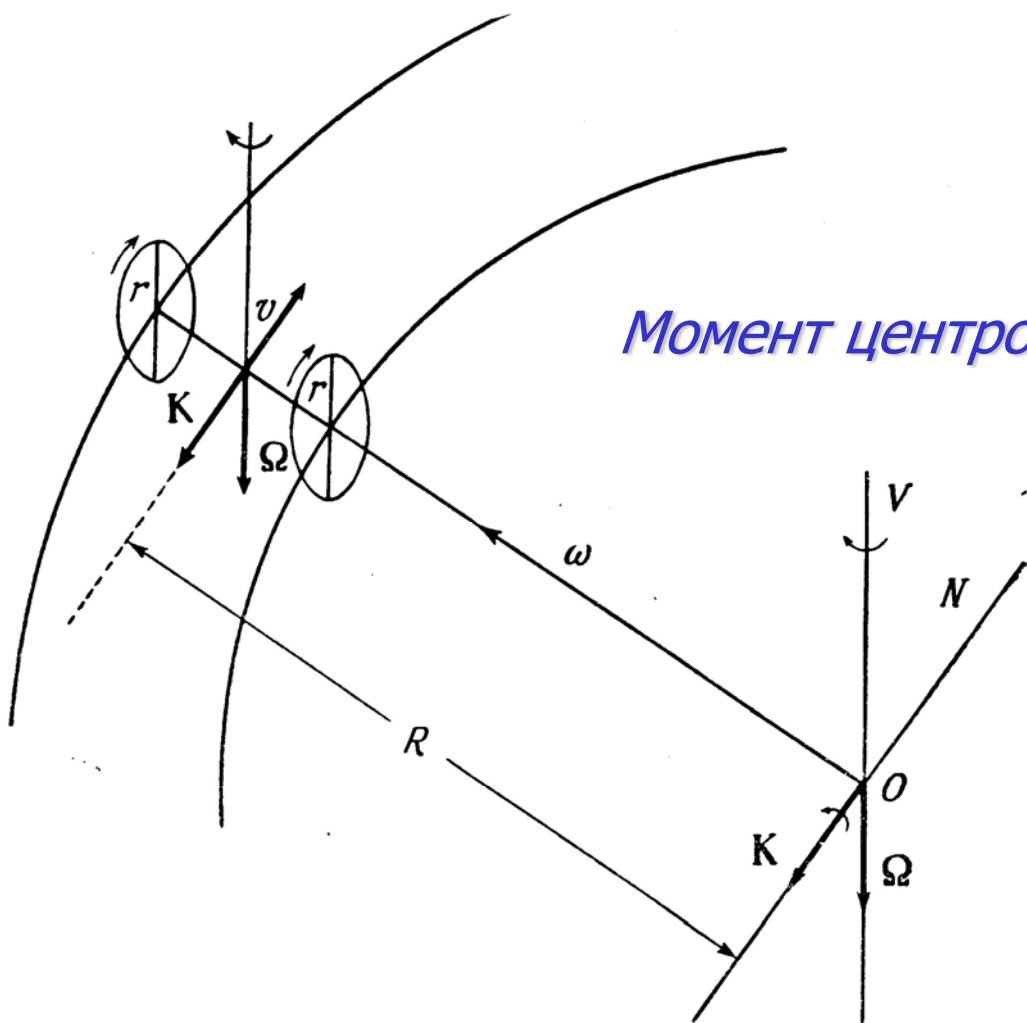
$C$  – момент инерции обоих колес относительно их оси

Момент центробежной силы: 
$$N = \frac{MV^2 h}{R}$$

$M$  – масса вагона,  
 $h$  – высота центра тяжести

Отношение моментов:

$$\frac{nK}{N} = \frac{nC}{Mh} \sim 0,05$$



# Гироскопический эффект, возникающий в моторах и турбинах, установленных на кораблях

1) Ось вращения  $\parallel$  продольной оси. Бортовая качка – нет эффекта.

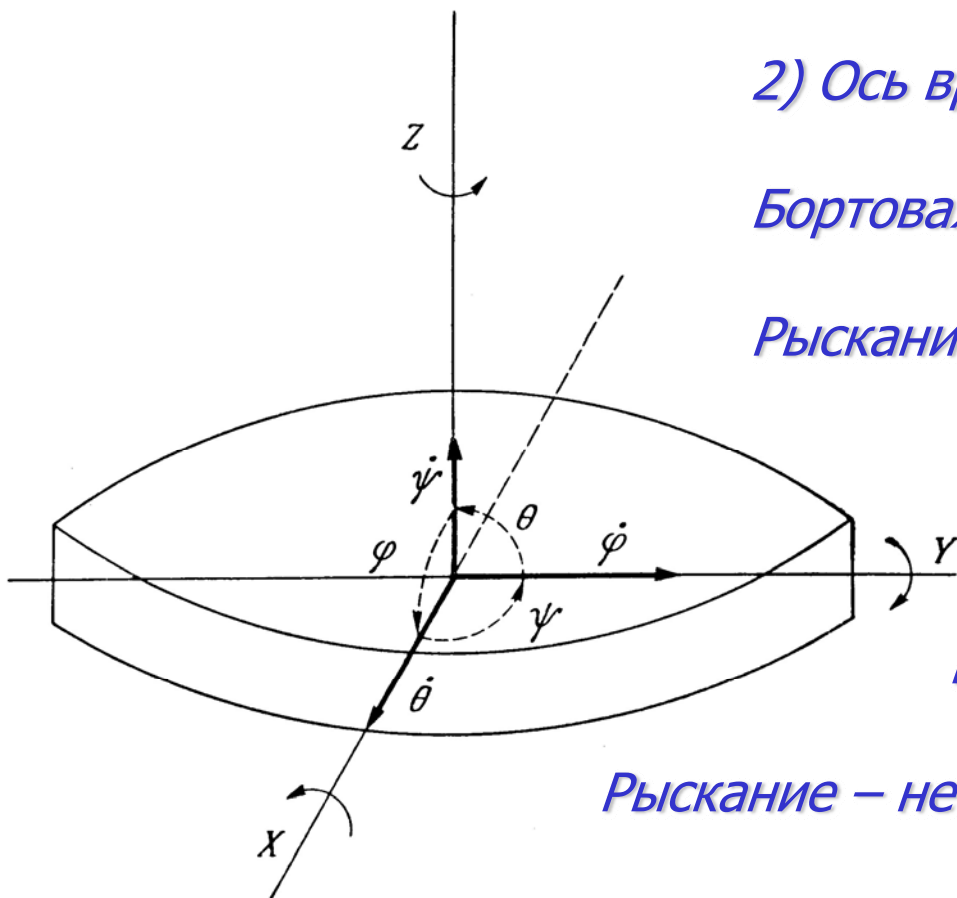
Рыскание:  $K_x = C\omega \frac{d\psi}{dt}$

Килевая качка:  $K_z = -C\omega \frac{d\theta}{dt}$

2) Ось вращения  $\parallel$  поперечной оси.

Бортовая качка:  $K_z = C\omega \frac{d\varphi}{dt}$

Рыскание:  $K_y = -C\omega \frac{d\psi}{dt}$  Килевая – нет.

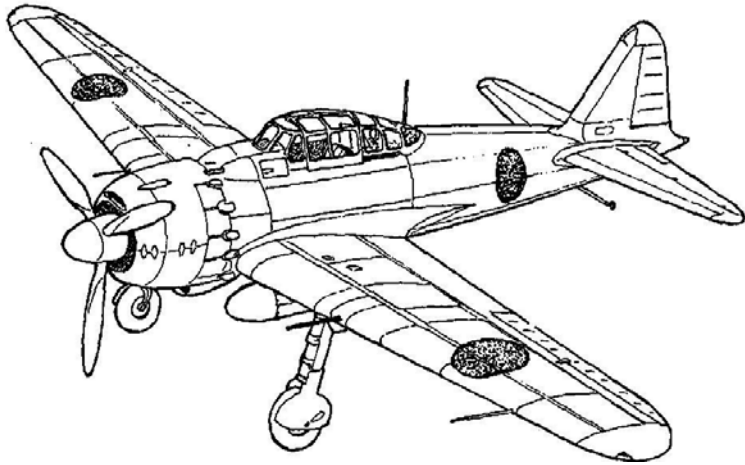


3) Ось вращения  $\perp$  палубе.

Бортовая качка:  $K_x = -C\omega \frac{d\varphi}{dt}$

Рыскание – нет. Килевая качка:  $K_y = C\omega \frac{d\theta}{dt}$

# Гироскопический эффект у винтовых самолетов



*Пусть винт вращается по часовой стрелке (если смотреть сзади).*

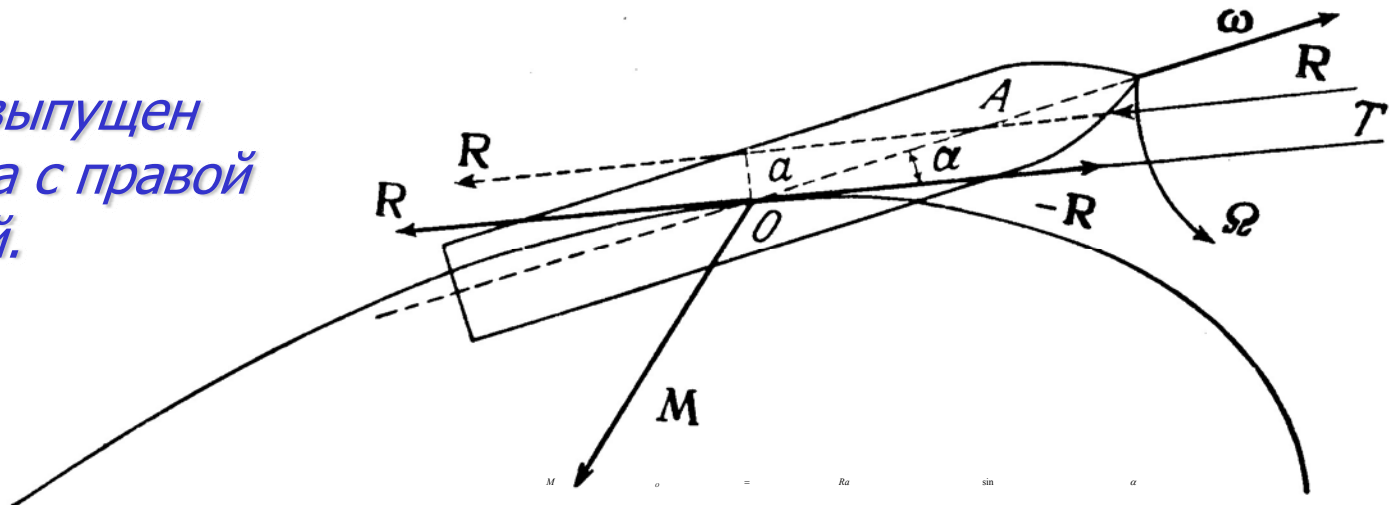
*Резкий подъем носа разворачивает самолет вправо, способствуя возникновению восходящей спирали.*



*Если винты вращаются с одинаковой скоростью в разных направлениях, их гироскопические эффекты взаимно уничтожаются.*

# Гироскопический эффект вращающегося снаряда

*Снаряд выпущен из ствола с правой нарезкой.*



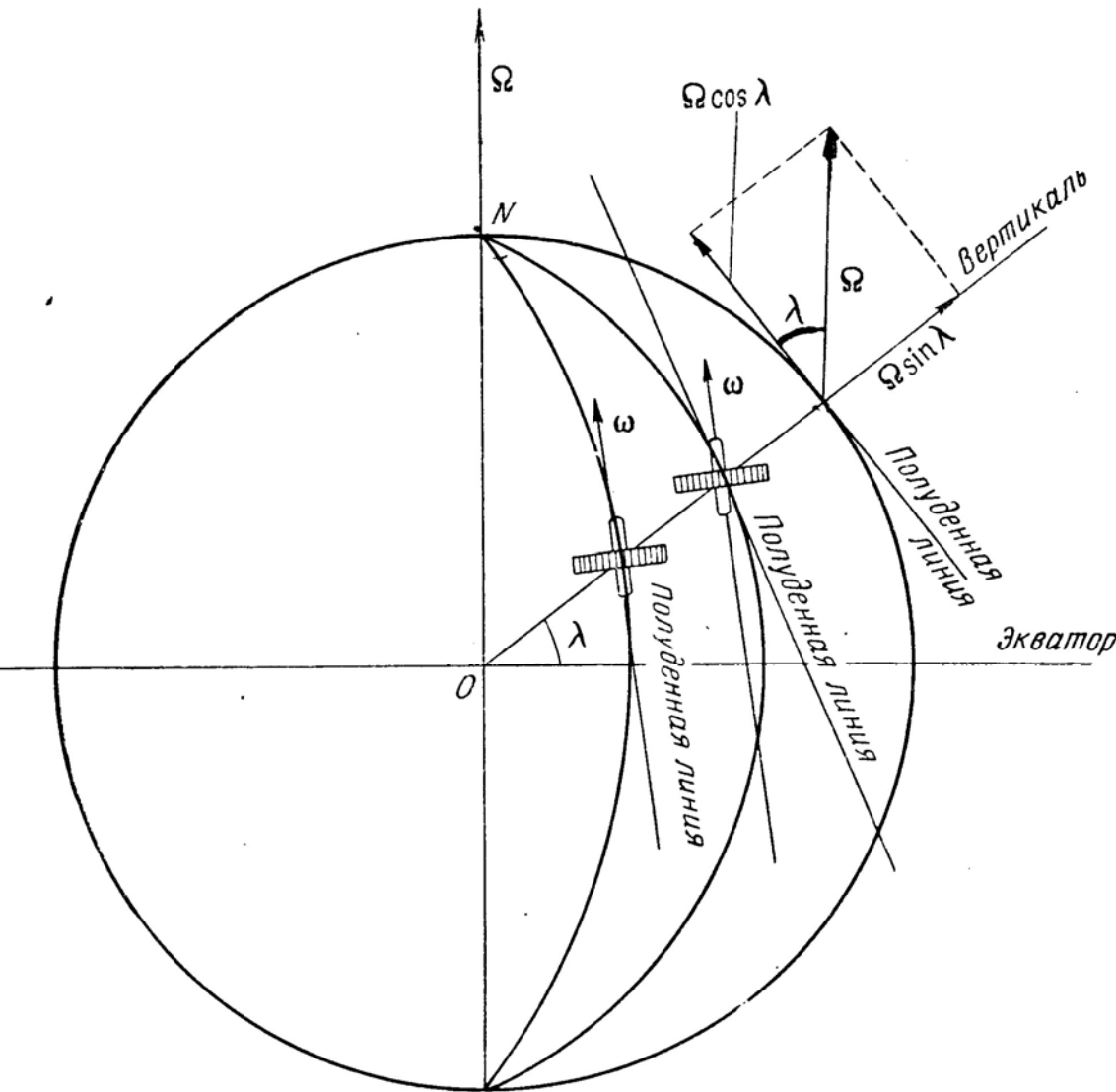
*На снаряд сила сопротивления воздуха  $R$  и момент сопротивления воздуха  $M$ , вычисленный относительно центра масс  $O$ :  $M_O = Ra \sin \alpha$  (см. рисунок).*

*Угловая скорость прецессии, вызванной действием момента сопротивления воздуха:*

$$\dot{\Psi} = \frac{Ra}{C\omega}$$

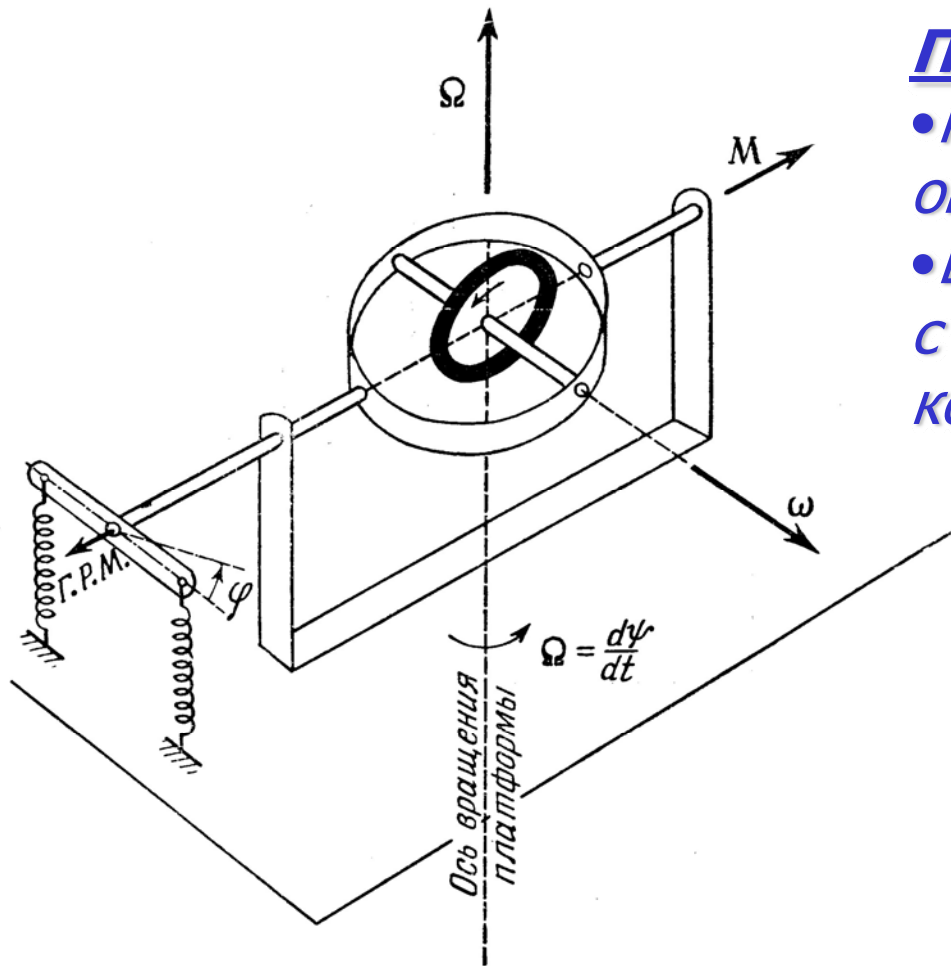
*Головка снаряда описывает пространственную циклоидальную кривую, расположенную справа от плоскости стрельбы.*

# Гирскопический компас



*Если ось гироскопа установлена по полуденной линии, то для того, чтобы она все время была так направлена, ее нужно заставить прецессировать относительно оси Земли с угловой скоростью суточного вращения Земли. Тогда направление оси гироскопа в неподвижном пространстве будет изменяться так же, как изменяется направление меридиана.*

# Гирскопические управляющие устройства



## Прецессионный гироскоп:

- Повороты внутреннего кольца ограничены пружинами.
- Внешнее кольцо жестко связано с платформой, установленной на корабле или в самолете.

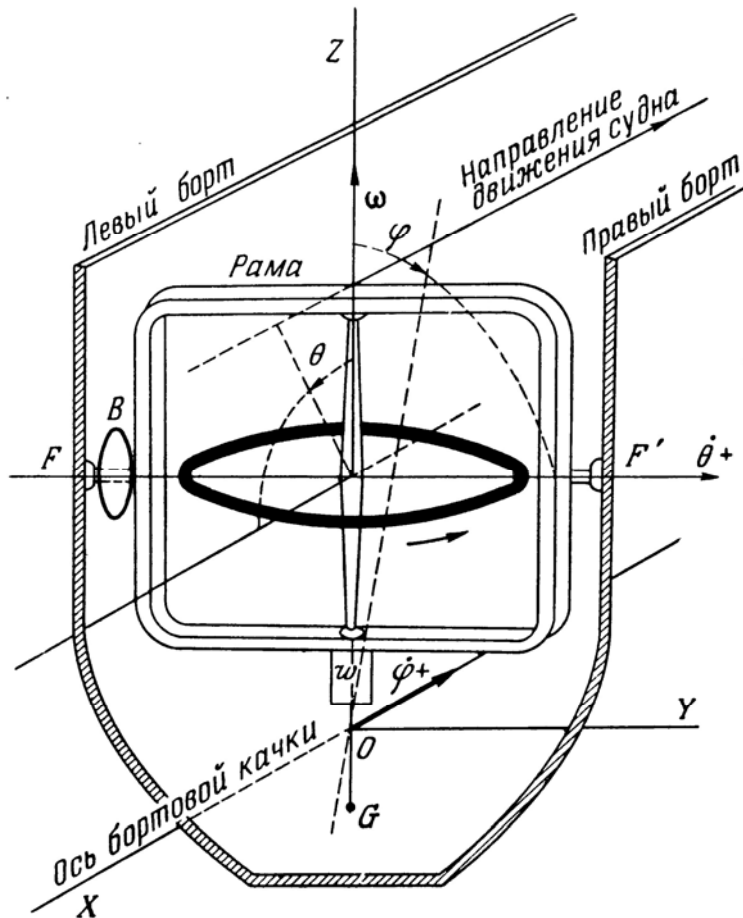
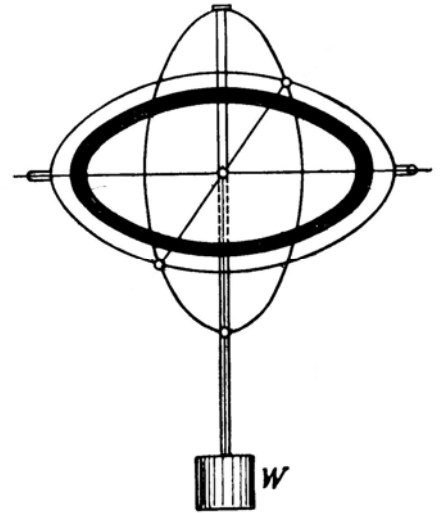
## Применение:

- Гирорудевой (на корабле)
- Автопилот (в самолете)
- Гирогоризонт
- Гиромагнитный компас
- Гироскопические орудийные прицелы
- Дифференцирующие и интегрирующие устройства

# Гирскопические стабилизаторы

Если в сферическом маятнике свободно подвешенным телом служит **гирскоп со своей оправой**, смонтированной так, что ось собственного вращения

совпадает с прямой, соединяющей точку подвеса с центром тяжести ротора, то **такой маятник называется гирскопическим.**



## Применение:

- Для уменьшения качки корабля
- При ведении автоматического огня из морских орудий
- Для создания искусственного горизонта
- Однорельсовая железная дорога (устойчивость вагонов)



# Промышленные центрифуги



*Максимальная скорость  
4 000 об/мин*



*Максимальная скорость  
6 000 об/мин*



*Максимальная скорость  
8 000 об/мин*

# Промышленные ультрацентрифуги



*Высокоскоростная центрифуга  
вращается вокруг вертикальной  
оси со скоростью 120 000 об/мин.*



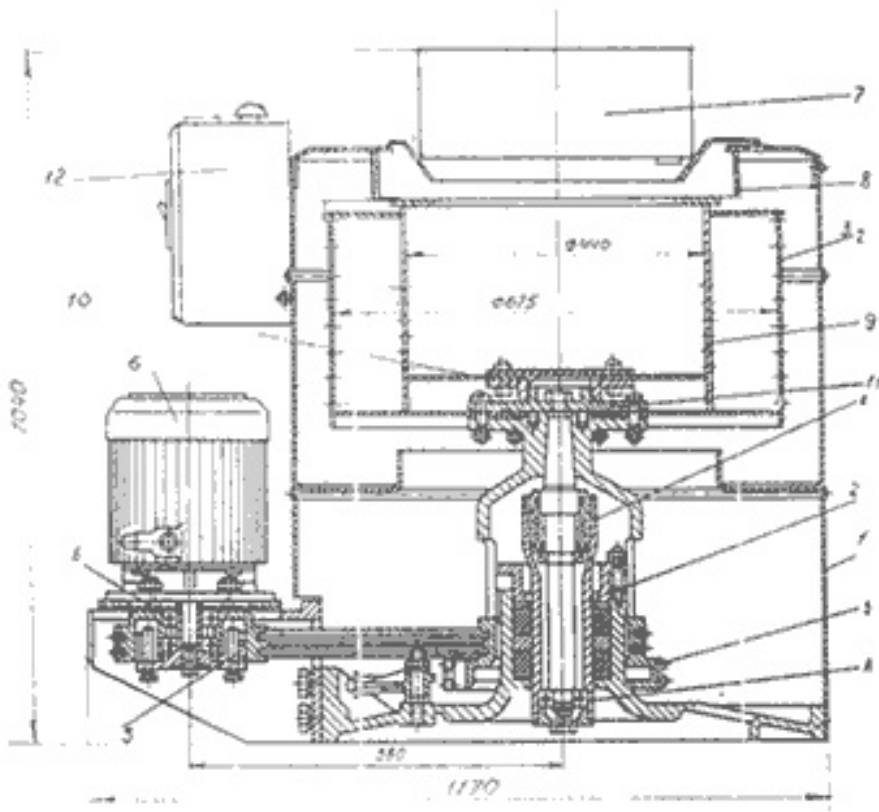
*Максимальная скорость 30 000 об/мин,  
максимальное ускорение 110 500 g*

**Центрифугирование** – разделение в поле центробежных сил жидких дисперсных систем с частицами размером более 100 нм. Используют для выделения составляющих фаз (жидкая фаза – фильтрат, твердая фаза – осадок) из двухкомпонентных систем (суспензии, эмульсии) и трехкомпонентных систем (эмульсии, содержащие твердую фазу).

**Ультрацентрифугирование** – метод разделения и исследования частиц размером менее 100 нм (макромолекул органелл животных и растит. клеток, вирусов и др.) в поле центробежных сил. Позволяет разделять смеси частиц на фракции или индивидуальные компоненты, находить молекулярную массу полимеров. Дает возможность оценивать форму и размеры макромолекул в растворе, влияние статического давления на стабильность частиц, параметры взаимодействия типа ассоциация – диссоциация макромолекул друг с другом или с молекулами низкомолекулярных компонентов и ионами и др.

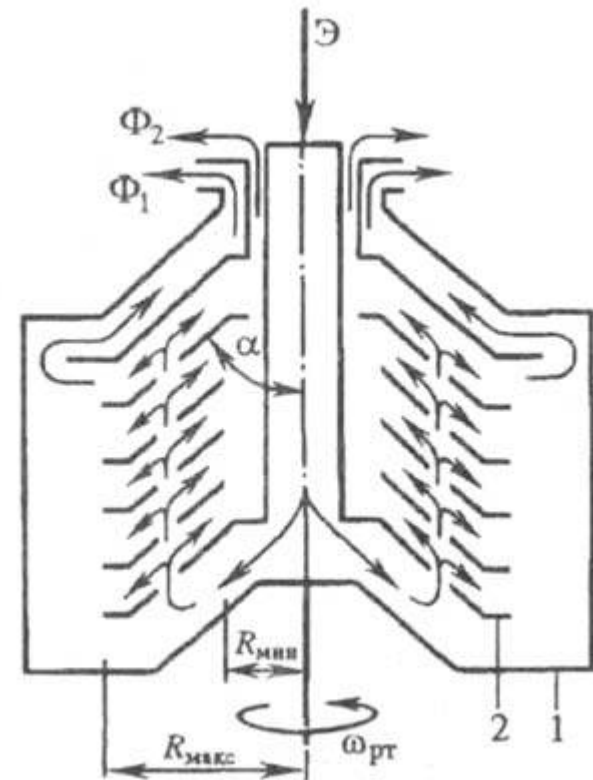
# Принцип действия

*При вращении в центрифуге частицы с наибольшим удельным весом располагаются на периферии, а частицы с меньшим удельным весом — ближе к оси вращения.*



Центрифуга :

1-кожух ; 2-вал в сборе ; 3-ротор ; 4-механизм торможения ; 5-центробежная муфта ; 6-электродвигатель ; 7-теповентиллятор ; 8-фартук ; 9-сменная корзина ; 10-штулка ; 11-центр ; 12-панель управления .

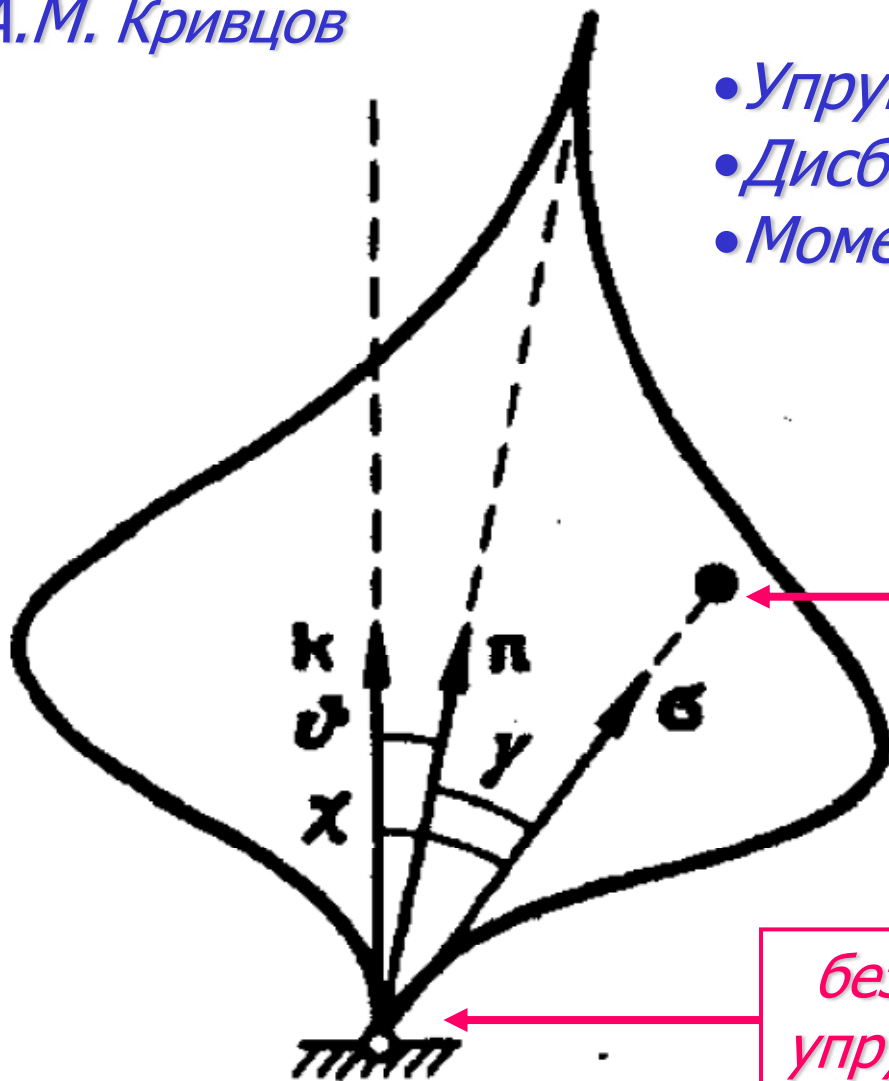


# Математическая модель центрифуги

А.М. Кривцов

Обязательно нужно учитывать!

- Упругие свойства основания
- Дисбаланс массы
- Момент, создаваемый двигателем



дисбаланс  
массы

$$\theta_* \stackrel{\text{def}}{=} m_* \rho^2$$

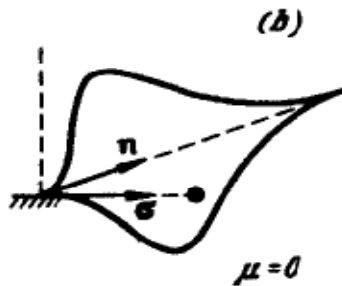
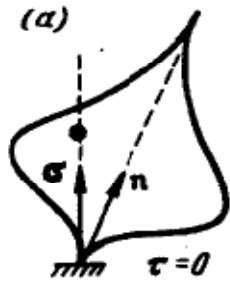
$$\theta = \theta_{12} (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) + \theta_3 \mathbf{nn}$$

безынерционное  
упругое основание

Уравнения движения:  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \Omega \mathbf{n}$ ,  $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}$

$$\theta_{12} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} + \theta_* \boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{\sigma}} + \theta_3 (\Omega \mathbf{n})' + C \mathbf{k} \times \mathbf{n} - M_1 \mathbf{k} - M_2 \mathbf{n} = 0$$

Существуют три стационарных решения:



Третье решение представляет практический интерес

$$\omega^2 = \frac{2C \sin \vartheta}{\theta \sin 2\vartheta + \theta_* \sin 2(\vartheta + \gamma)}$$

Исследование устойчивости основного стационарного решения:

$$\mathbf{A}_2 \cdot \delta \ddot{\mathbf{n}} + \omega \mathbf{A}_1 \cdot \delta \dot{\mathbf{n}} + \omega^2 \mathbf{A}_0 \cdot \delta \mathbf{n} + \mathbf{B}_2 \cdot \delta \ddot{\boldsymbol{\sigma}} + \omega^2 \mathbf{B}_0 \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} + \omega C_1 \delta \dot{\Omega} + \omega^2 C_0 \delta \Omega - \delta \mathbf{M}_d = 0$$

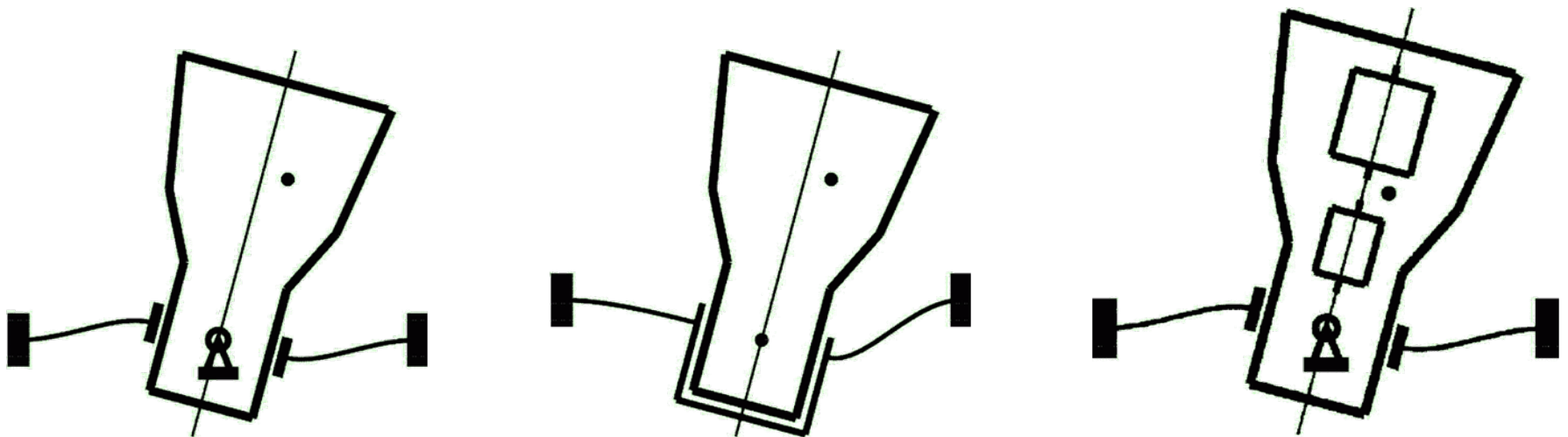
Коэффициенты уравнения в вариациях – тензоры, зависящие от времени.

# Математическая модель ультрацентрифуги

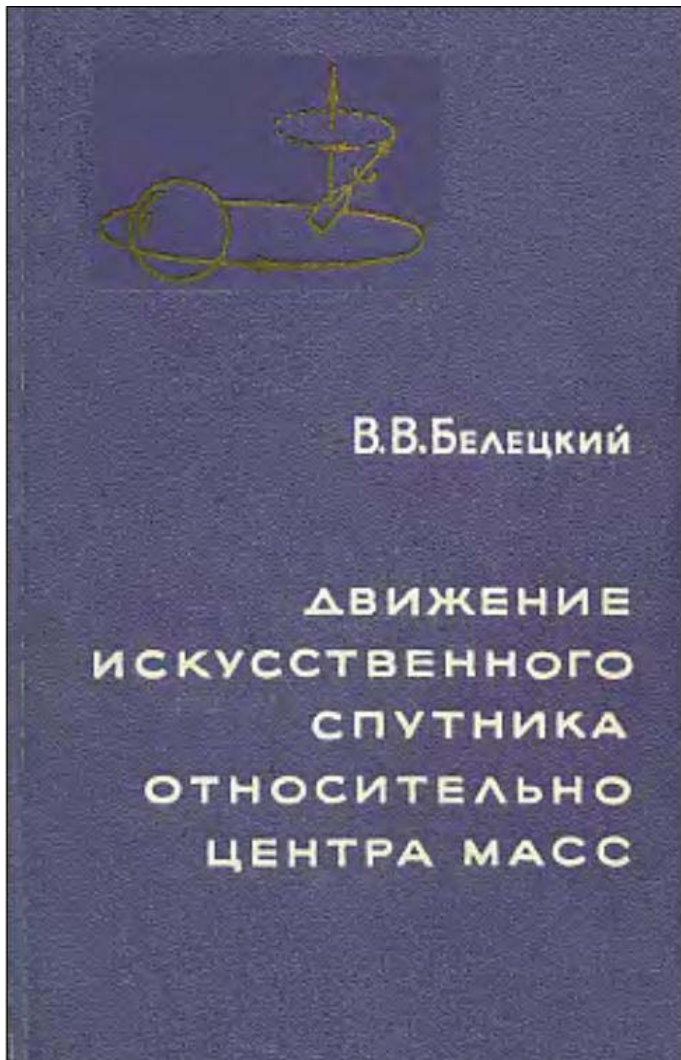
**Особенность ультрацентрифуг:** Рабочий диапазон угловых скоростей лежит выше первых собственных частот упругого основания. Поэтому необходимо учитывать инерционные свойства упругого основания.

*Жилин П.А., Товстик Т.П. Вращение твердого тела на инерционном стержне // Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. № 458. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1995. С. 78-83.*

*Е.А. Иванова. Твердое тело на инерционно упругой пластине.*



# Механика космического полета

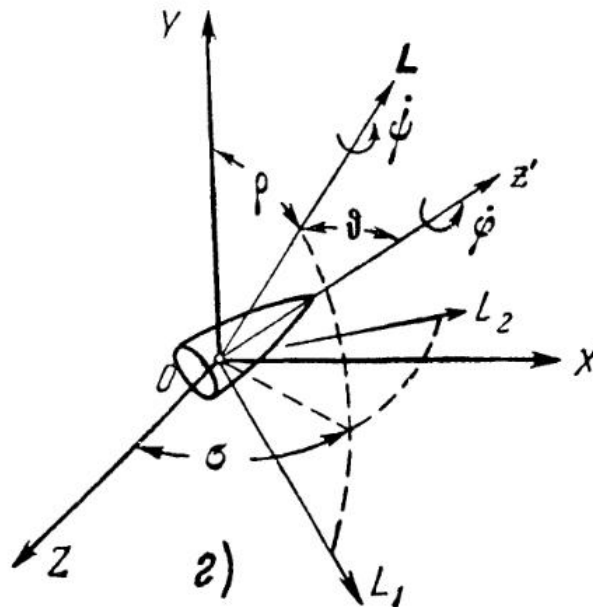
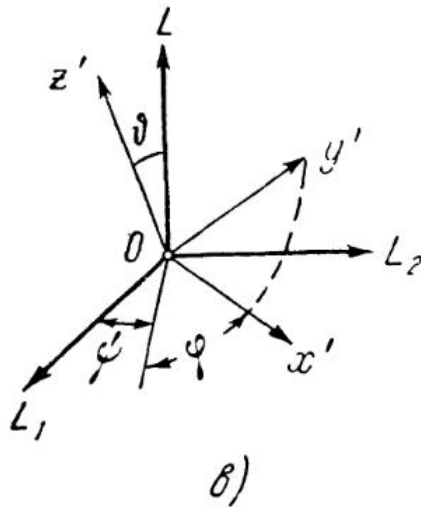
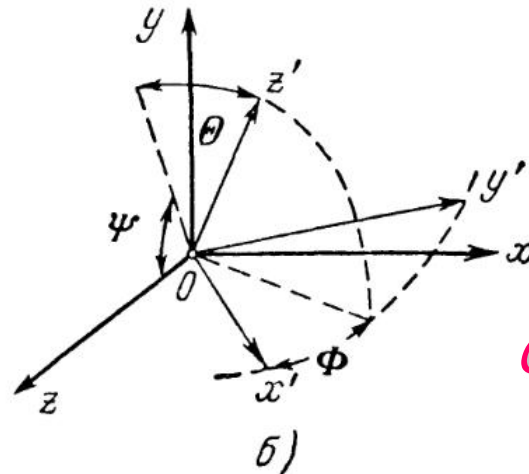
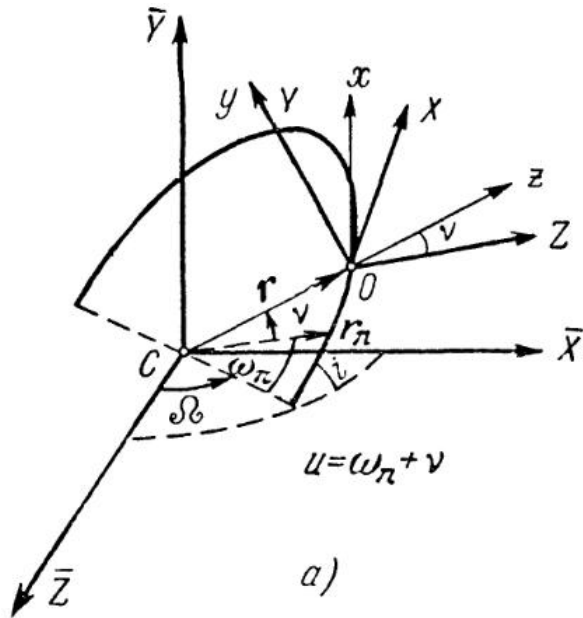


*«Сложность задачи о вращательном движении искусственных космических объектов обуславливается произвольностью формы и распределения масс объекта, произвольностью начальных данных, многочисленностью факторов, влияющих на движение.»*

*(цитата из книги)*



# Кинематика вращательного движения



**Системы координат:**

1. «перигейная»
2. «орбитальная»
3. связанная с кинетическим моментом спутника
4. связанная с главными осями инерции спутника

# Внешние воздействия

- 1. Гравитационное притяжение к Земле.*
- 2. Аэродинамические воздействия. Существенные факторы:*
  - а) центр давления не совпадает с центром масс;*
  - б) скорость набегающего потока не лежит в плоскости орбиты;*
  - в) из-за собственного вращения возникают диссипативные моменты;*
  - г) плотность атмосферы неодинакова в каждой точке поверхности спутника.*
- 3. Воздействие магнитного поля Земли. Причины:*
  - а) наличие токовых систем и постоянных магнитов;*
  - б) намагничивание оболочки спутника в магнитном поле Земли (при вращении в магнитном поле возникают вихревые токи).*
- 4. Световое давление солнечного излучения. Моменты светового давления могут существенно влиять на вращательное движение.*

# Методы исследования

- *Считается, что все внешние моменты – малые величины.*
- *Строится решение задачи о движении спутника по орбите и вращении вокруг центра масс без учета этих моментов.*
- *Рассматриваются малые возмущения создаваемые внешними моментами и исследуется устойчивость невозмущенного движения.*
- *Исследуются резонансные явления (параметрический резонанс) и нелинейные колебания вблизи резонансов.*
- *Предлагаются методы стабилизации спутников: посредством дополнительного тела; стабилизация относительно магнитного поля Земли; стабилизация на Солнце моментами сил светового давления.*
- *Для выявления основных эффектов движения (вековых, долгопериодических и периодических) используется метод усреднения уравнений по быстрым переменным.*

# Задачи динамики твердого тела, разрешимые в квадратурах

1. Задачи, где есть интеграл энергии и интеграл кинетического момента. Свободное вращение (случай Эйлера).
2. Задачи, где есть интеграл энергии и проекции кинетического момента на две оси – постоянные величины. Симметричное тело в поле тяготения, центр масс – на оси симметрии (случай Лагранжа). Симметричное тело, осевой момент инерции в два раза меньше экваториальных, центр масс – в плоскости равных моментов инерции (случай Ковалевской).

*Метод построения решения в квадратурах:*

*Находят первые интегралы. Используя первые интегралы исключают все переменные, кроме одной, и таким образом сводят задачу к решению одного дифференциального уравнения. Успех решения задачи зависит от удачного выбора основных переменных, т.е. от способа описания кинематики твердого тела.*

К. Магнус. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 525с. (Стр. 117):

*«Много усилий было затрачено на поиски таких случаев, для которых было бы возможно точное решение нелинейных уравнений движения. Как бы ни были привлекательны для математика достигнутые при этом результаты, приходится, однако, констатировать, что с физической точки зрения или с точки зрения чисто гироскопической техники они почти (или даже совсем) не представляют интереса.»*

# Кватернионы

*Рассмотрим четырехмерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Элемент этого пространства в базисе имеет вид:*

$$\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$$

*Векторное пространство превращается в алгебру, если в нем определено произведение, при этом имеют место свойства:*

$$(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N) \qquad (\lambda \Lambda) \circ (\mu M) = \lambda \mu \Lambda \circ M$$

$$(\Lambda + M) \circ (N + P) = \Lambda \circ N + M \circ N + \Lambda \circ P + M \circ P$$

*Четырехмерные векторы называются кватернионами, если*

$$i_0 \circ i_k = i_k \circ i_0 = i_k \quad (k = 0, 1, 2, 3) \qquad i_k \circ i_k = -i_0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$i_1 \circ i_2 = i_3 \qquad i_2 \circ i_3 = i_1 \qquad i_3 \circ i_1 = i_2$$

$$i_2 \circ i_1 = -i_3 \qquad i_3 \circ i_2 = -i_1 \qquad i_1 \circ i_3 = -i_2$$

*Абстрактная алгебра допускает различные интерпретации.*

**Пример.** Двумерное векторное пространство:  $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1$

1. Геометрическая интерпретация. Вектор – это направленный отрезок в геометрической плоскости.

2. Матричная интерпретация. 
$$\Lambda = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

3. Числовая интерпретация. 
$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \sqrt{-1}$$

**Кватернионы.** Геометро-числовая интерпретация:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \lambda_0 + \underline{\lambda}$$

$$i_k \circ i_k = -1 \quad i_n \circ i_k = i_n \times i_k \quad (n \neq k)$$

Сопряженный кватернион: 
$$\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \underline{\lambda}$$

Норма кватерниона: 
$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

# Использование кватернионов для задания ориентации твердого тела

*Рассмотрим отображение  $R \rightarrow R'$  где  $R$  – произвольный кватернион:*

$$R' = \Lambda \circ R \circ \bar{\Lambda} \quad \|\Lambda\| = 1$$

- Это отображение не меняет скалярную часть кватерниона*
- Это отображение поворачивает векторную часть кватерниона*

*Таким образом, ортогональное преобразование можно задавать единичными кватернионами:*

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda \underline{e}$$

*где  $\lambda$  – модуль вектора  $\underline{\lambda}$ ,  $\underline{e}$  – единичный вектор, определяющий направление этого вектора.*

$$\|\Lambda\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$$



# Параметры Родрига-Гамильтона

*Теорема. Поворот, определяемый кватернионом*

$$\Lambda = \cos(\varphi / 2) + \sin(\varphi / 2)\underline{e}$$

*есть поворот вокруг вектора  $\underline{e}$  на угол  $\varphi$ .*

*Другая форма записи:*

$$\Lambda = \left\{ \cos \frac{\varphi}{2}, x \sin \frac{\varphi}{2}, y \sin \frac{\varphi}{2}, z \sin \frac{\varphi}{2} \right\}$$

*Коэффициенты этого кватерниона*

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \quad \lambda_1 = x \sin \frac{\varphi}{2} \quad \lambda_2 = y \sin \frac{\varphi}{2} \quad \lambda_3 = z \sin \frac{\varphi}{2}$$

*называются параметрами Родрига-Гамильтона.*

# Спиновые матрицы Паули

*Спиновые матрицы Паули дают матричную интерпретацию алгебры кватернионов. Пусть базис выбран так:*

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

*Тогда кватернион можно представить в форме матрицы:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{pmatrix}$$

*Сопряженный кватернион – это эрмитово-сопряженная матрица (комплексно сопряженная и транспонированная) :  $\overline{\Lambda} = \Lambda^*$*

*Кватернионы единичной нормы описываются комплексными матрицами, удовлетворяющими двум условиям:*

$$\Lambda \Lambda^* = E \quad \det \Lambda = 1$$

# Параметры Кейли-Клейна

Рассмотрим матрицу  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{pmatrix}$

такую, что  $\Lambda\Lambda^* = E$   $\det \Lambda = 1$

Элементы этой матрицы

$$a = \lambda_0 + i\lambda_3 \quad b = \lambda_2 + i\lambda_1$$

называются параметрами Кейли-Клейна.

В новых обозначениях матричная интерпретация кватерниона приобретает вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

# Уравнения Лагранжа

*Уравнения Лагранжа выводятся для системы материальных точек, но применяются для твердых тел!*

*Для голономных систем:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

*Для консервативных систем:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad L = T - \Pi$$

*Для неголономных систем (уравнения Лагранжа с множителями):*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2} + \dots + \lambda_m A_{rm} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$$A_{1k} \dot{q}_1 + A_{2k} \dot{q}_2 + \dots + A_{nk} \dot{q}_n = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

# Уравнения Гамильтона

*Справедливы только для консервативных голономных систем*

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad H = \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - L$$

# Уравнения Рауса

*Справедливы для голономных систем. Выводятся из ур-й Лагранжа.*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = -Q_r \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad R = \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - T$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = m + 1, \dots, n)$$

*Уравнения Рауса удобны при наличии циклических координат.*

*В этом случае:*

$$q_i(t) = \int \frac{\partial R}{\partial p_i} dt \quad (i = m + 1, \dots, n)$$

# Уравнения Аппеля

*Справедливы и для голономных, и для неголономных систем.*

*Пусть положение системы описывается  $n+k$  обобщенными координатами и на систему наложено  $k$  кинематических связей.*

*Введем псевдоскорости:*


$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^{n+k} \alpha_{ij} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

**Уравнения Аппеля:**

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\pi}_i} = \Pi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*Здесь  $S$  – энергия ускорений. Например, для системы материальных точек:*

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \left( \ddot{x}_i \right)^2 + \left( \ddot{y}_i \right)^2 + \left( \ddot{z}_i \right)^2 \right)$$

$$\Pi_i = \sum_{j=1}^{n+k} \beta_{ji} Q_j$$


# Использование методов динамики твёрдого тела в других областях науки

- *Кватернионы применяются в релятивистской физике.*
- *Параметры Кейли-Клейна и спиновые матрицы Паули применяются в квантовой механике.*
- *Уравнения Гамильтона применяют в квантовой механике. Вместо координаты и импульса в этих уравнениях фигурируют соответствующие волновые функции.*

# Модифицированные углы Эйлера (углы Жилина)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{n})$$

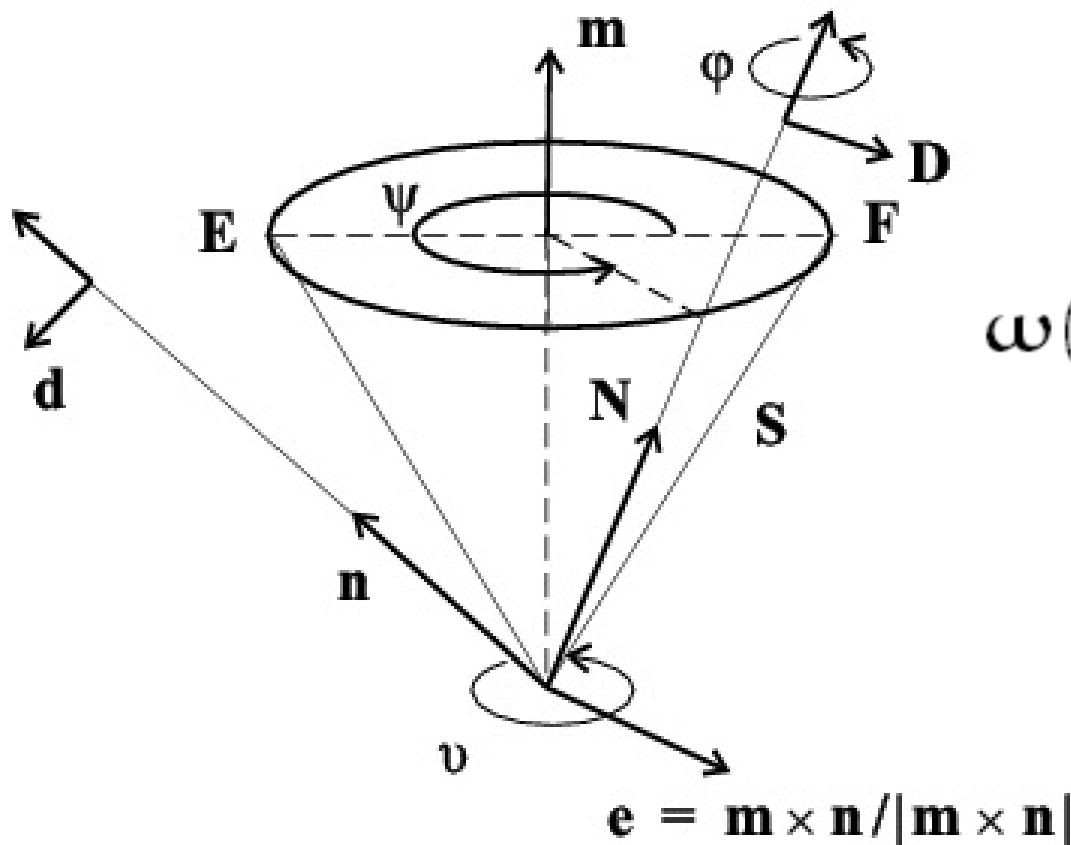
$$\mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} / |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|,$$

*Левая угловая скорость:*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\vartheta}\mathbf{e}' + \dot{\varphi}\mathbf{D},$$

*Правая угловая скорость:*

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}(t)$$





# Случай Эйлера. Постановка задачи

*Тензор инерции  
в отсчетной  
конфигурации:*

$$\Theta = \theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$
$$0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3, \quad \theta_1 < \theta_3, \quad \theta_3 \leq \theta_1 + \theta_2$$

*Тензор инерции в актуальной конфигурации:*

$$\Theta^{(t)} = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) = \sum_{k=1}^3 \theta_k \mathbf{D}_k \otimes \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{D}_k = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_k.$$

*Вектор кинетического момента и кинетическая энергия:*

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}(t);$$

$$\mathbf{L} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} = \text{const}.$$

$$h \equiv 2K = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}.$$

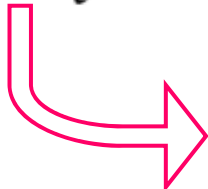
$$2K = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \quad h = \text{const}.$$

# Анализ интеграла энергии

$$\mathbf{l}\mathbf{m}(t) \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L} = \Theta \cdot \Omega(t), \quad l \equiv |\mathbf{L}| > 0.$$

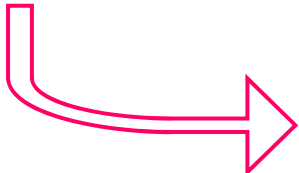
$$\mathbf{m}(t) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{m}(t) = \frac{h}{l^2} \equiv \frac{h}{l^2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{m}$$

*Интеграл энергии:*


$$\mathbf{m}(t) \cdot \left( \Theta^{-1} - \frac{h}{l^2} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{m}(t) = 0.$$

$$\mathbf{m}(t) = x_m \mathbf{d}_1 + y_m \mathbf{d}_2 + z_m \mathbf{d}_3, \quad x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 1,$$

$$\Theta^{-1} - \frac{h}{l^2} \mathbf{E} = \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{h}{l^2} \right) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{h}{l^2} \right) \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \left( \frac{1}{\theta_3} - \frac{h}{l^2} \right) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$


$$\left( \frac{h}{l^2} - \frac{1}{\theta_3} \right) z_m^2 = \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{h}{l^2} \right) x_m^2 + \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{h}{l^2} \right) y_m^2.$$

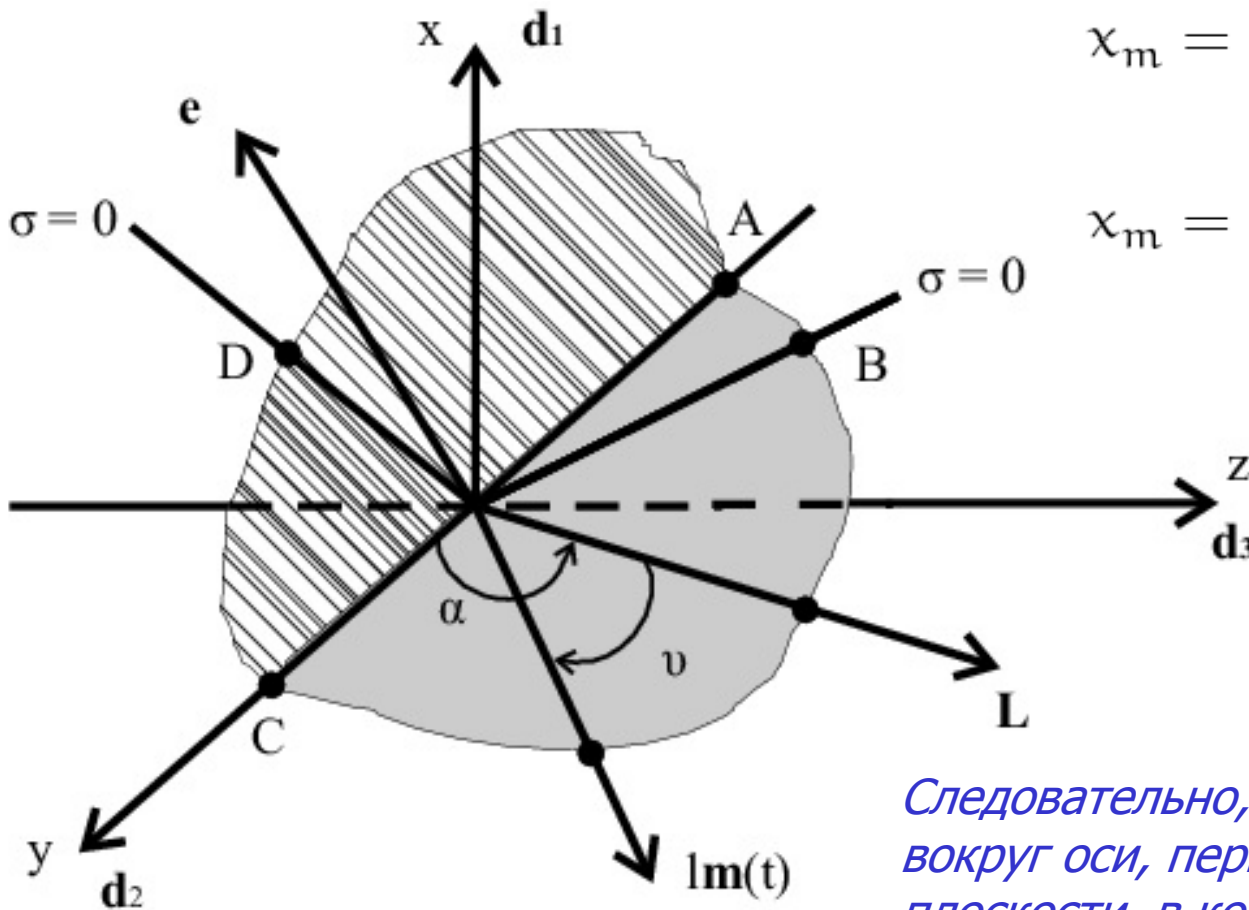
$$\sigma \equiv l^2 - \theta_2 h,$$

*– МОЖЕТ ИМЕТЬ  
любой знак*

$$l^2 - h\theta_1 > 0, \quad l^2 - h\theta_3 < 0$$

# Вращение тела в случае $\sigma = 0$

Поверхность разделяется на две плоскости:



$$x_m = +\sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}} z_m.$$

$$x_m = -\sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}} z_m.$$

**Вектор  $\underline{m}(t)$  должен принадлежать одной из этих плоскостей!**

Следовательно, он должен вращаться вокруг оси, перпендикулярной той плоскости, в которой он лежит в начальный момент времени:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}) / |\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}| \equiv (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_2^2}.$$

Тензор поворота вектора  $\mathbf{l}\mathbf{m}(t) \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t)$  может отличаться от тензора поворота твердого тела только поворотом вокруг вектора кинетического момента. Следовательно:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{d}_2 \times \mathbf{L} / \sqrt{l^2 - l_2^2}, \quad \hat{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L} / l.$$

Движение вектора  $\underline{m}(t)$  определяется формулой:

$$\mathbf{l}\mathbf{m}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{\sin \alpha} (l \sin \vartheta \mathbf{d}_2 + \sin(\alpha - \vartheta) \mathbf{L}),$$

Вектор угловой скорости: где  $\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_2^2} / l$ ,  $\cos \alpha = l_2 / l$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi} \hat{\mathbf{L}} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{e}. \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L},$$

$$\psi \hat{\mathbf{L}} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{l}\mathbf{m}(t).$$

$$\psi \mathbf{m}(t) + \dot{\vartheta} \mathbf{e} = l \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}(t).$$

$$\gamma = - \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_3} \right) \frac{2l_1 l_3}{\sin \alpha}.$$

$$\psi(t) = \frac{ht}{l} = \frac{lt}{\theta_2}; \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \frac{1 + \cos \alpha - (1 - \cos \alpha) e^{\gamma t}}{1 + \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) e^{\gamma t}},$$

# Вращение тела в случае $\sigma > 0$

После исключения координаты  $z_m$  из интеграла энергии получим уравнение цилиндрической поверхности с поперечным сечением:

$$\frac{x_m^2}{a^2} + \frac{y_m^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{\theta_1(h\theta_3 - l^2)}{l^2(\theta_3 - \theta_1)}, \quad b^2 = \frac{\theta_2(h\theta_3 - l^2)}{l^2(\theta_3 - \theta_2)}. \quad a^2 < 1 \quad b^2 < 1$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\theta_1(\theta_3 - \theta_2)}{\theta_2(\theta_3 - \theta_1)} < 1.$$

Параметрическое задание годографа  $\underline{m}(t)$  :

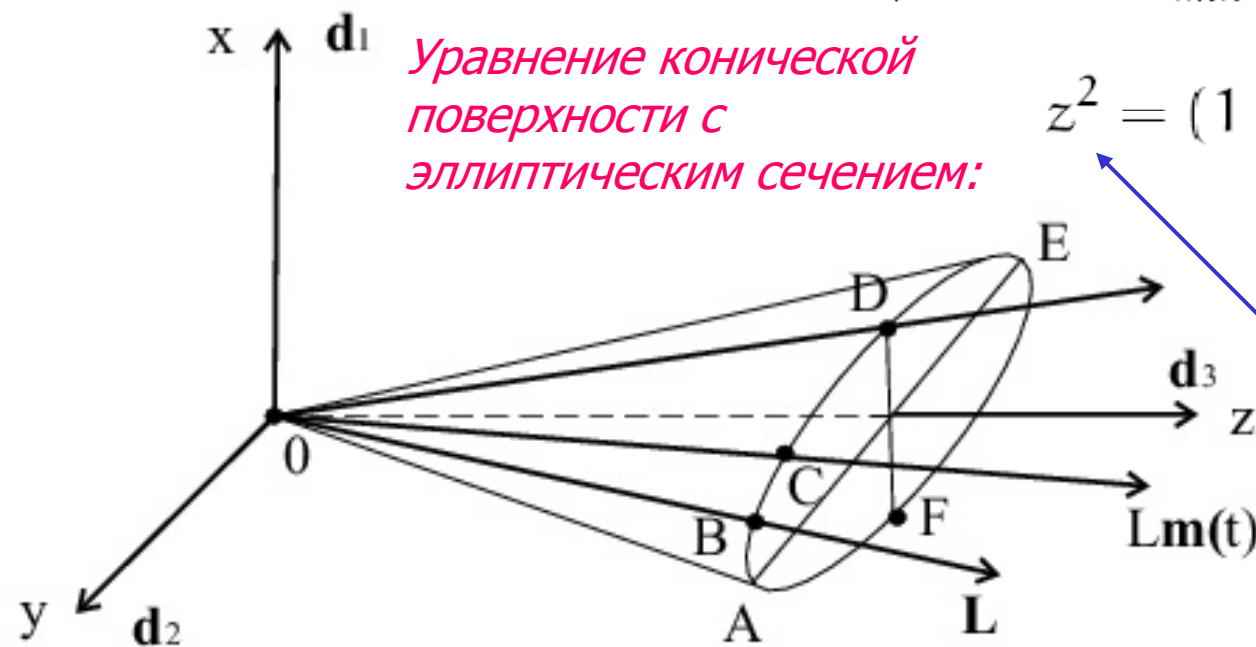
$$x_m = a \cos \gamma, \quad y_m = b \sin \gamma, \quad z_m = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma - b^2 \sin^2 \gamma}.$$

$$\sqrt{1 - b^2} \equiv z_{\min} \leq z_m \leq z_{\max} \equiv \sqrt{1 - a^2}$$

Уравнение конической поверхности с эллиптическим сечением:

$$z^2 = (1 - a^2) \frac{x^2}{a^2} + (1 - b^2) \frac{y^2}{b^2}.$$

Вектор  $\underline{m}(t)$  должен принадлежать конической поверхности



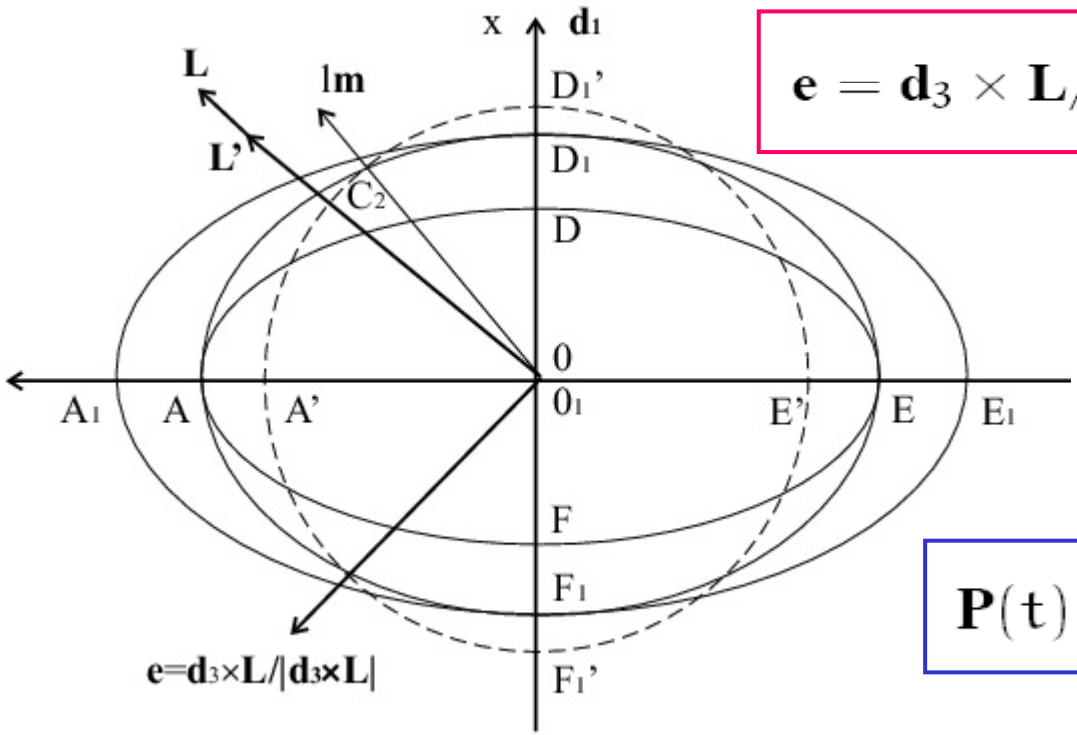
*Представление тензора поворота (через модифицированные углы Эйлера):*

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \underbrace{\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n})}_{\text{modified Euler angles}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n})$$

*Тензор поворота, который переводит вектор  $\underline{m}(t)$  в вектор  $\underline{\hat{L}}$*

*Тензор поворота  $\mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e})$  переводит вектор  $\underline{\hat{L}}$  в вектор  $\underline{m}(t)$ .*

*Выбор векторов  $\underline{e}$  и  $\underline{n}$ :*



$$\mathbf{e} = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{L} / |\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}| = (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_3^2}.$$

$$\underline{n} = \underline{d}_3$$

*Тензор поворота тела в случае  $\sigma > 0$ :*

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3).$$

*Движение вектора  $\underline{m}(t)$  определяется формулой:*

$$\mathbf{m}(t) = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{P}(t) = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \sin \vartheta \mathbf{d}_3 + \sin(\alpha - \vartheta) \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3) \right),$$

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_3^2}/l, \quad \cos \alpha = l_3/l, \quad (l_k \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_k).$$

*Вектор угловой скорости:*

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m} = \mathbf{P}^T \cdot \hat{\mathbf{L}}).$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L},$$

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_3 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m} = l \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}.$$

$$\dot{\psi} = \frac{l}{\theta_3} + \frac{h\theta_3 - l^2}{l\theta_3} \frac{1}{1 - z_m^2} > 0, \quad \dot{\varphi} = -\frac{h\theta_3 - l^2}{l\theta_3} \frac{z_m}{1 - z_m^2} < 0. \quad z_m = \cos(\alpha - \vartheta).$$

$$\dot{\gamma} = \omega_* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} > 0,$$

$$\cos(\alpha - \vartheta) = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma - b^2 \sin^2 \gamma}.$$

$$\omega_* \equiv \frac{l}{\theta_3} \sqrt{(1 - a^2) \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)}{\theta_1 \theta_2}}, \quad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2} < 1.$$

## Вращение тела в случае $\sigma < 0$

После исключения координаты  $x_m$  из интеграла энергии получим уравнение цилиндрической поверхности с поперечным сечением:

$$\frac{y_m^2}{c^2} + \frac{z_m^2}{d^2} = 1, \quad c^2 = \frac{\theta_2(l^2 - h\theta_1)}{l^2(\theta_2 - \theta_1)}, \quad d^2 = \frac{\theta_3(l^2 - h\theta_1)}{l^2(\theta_3 - \theta_1)}, \quad \frac{d^2}{c^2} < 1.$$

Параметрическое задание годографа  $\underline{m}(t)$  :

$$x_m = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 \gamma - c^2 \sin^2 \gamma}, \quad y_m = c \sin \gamma, \quad z_m = d \cos \gamma.$$

Тензор поворота тела представляется в форме:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_1^2}.$$

$$\dot{\psi} = \frac{l}{\theta_1} - \frac{l^2 - h\theta_1}{l\theta_1} \frac{1}{1 - x_m^2} > 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{l^2 - h\theta_1}{l\theta_1} \frac{x_m}{1 - x_m^2} > 0. \quad x_m = \cos(\alpha - \vartheta),$$

$$\cos(\alpha - \vartheta) = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 \gamma - c^2 \sin^2 \gamma}.$$

$$\dot{\gamma}(t) = \omega_* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma},$$

$$\omega_* \equiv \frac{l}{\theta_1} \sqrt{(1 - d^2) \frac{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_1)}{\theta_2 \theta_3}}, \quad k^2 = \frac{c^2 - d^2}{1 - d^2} < 1.$$



# Основные результаты

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_1^2}, \quad \sigma < 0;$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_2^2}, \quad \sigma = 0;$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{L}) / \sqrt{l^2 - l_3^2}, \quad \sigma > 0.$$

*Углы прецессии и собственного вращения изменяются монотонно во всех случаях. Изменение угла нутации при  $\sigma \neq 0$  носит осциллирующий характер. В случае  $\sigma \neq 0$  движение тела устойчиво, в случае  $\sigma = 0$  неустойчиво. Если значение  $\sigma$  очень мало исследование устойчивости в линейном приближении становится бессмысленным с практической точки зрения. Рассмотрим следующие начальные условия:*

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + \varepsilon)^2}}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = \frac{(\sqrt{2} + \varepsilon) l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + \varepsilon)^2}}, \quad \sigma > 0;$$

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = \frac{(\sqrt{2} - \varepsilon) l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}}, \quad \sigma < 0.$$

*Начальные условия очень близки, а решения совершенно разные!!!*

# Случай Лагранжа. Постановка задачи

Тензор инерции в отсчетной конфигурации:  $\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$ ,

Тензор инерции в актуальной конфигурации:

$$\mathbf{e}' \equiv \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e},$$

$$\Theta(\mathbf{t}) = \mathbf{P}_*(\mathbf{t}) \cdot [\mu \mathbf{E} + (\lambda - \mu) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \cdot \mathbf{P}_*^T(\mathbf{t}) = \mu \mathbf{E} + (\lambda - \mu) \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}',$$

Положение

центра масс:

$$\mathbf{r}_C = l \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(\mathbf{t}) = \mathbf{P}_*(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}_C = l \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e} \equiv l \mathbf{e}',$$

Вектор кинетического момента, вычисленный относительно неподвижной точки:

$$\mathbf{L}_* = \Theta \cdot \boldsymbol{\omega}_* = \mu \boldsymbol{\omega}_* + (\lambda - \mu) (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}') \mathbf{e}'. \quad \dot{\mathbf{P}}_* = \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{P}_*.$$

Второй закон динамики:

$$[\boldsymbol{\omega}_* + \eta (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}') \mathbf{e}']' = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu},$$

Начальные условия:

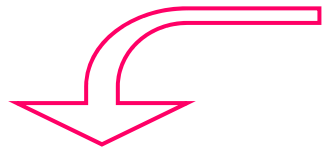
$$\mathbf{P}_*(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}_*(0) = \boldsymbol{\omega}_*^0.$$

# Преобразование уравнения движения к более удобной форме

*Проекция вектора угловой скорости на вращающуюся ось симметрии:*

$$(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}' = a_* = \text{const.} \quad (\text{первый интеграл})$$

*Представление тензора поворота с учетом первого интеграла:*


$$\mathbf{P}_* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t \mathbf{e}) \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}$$

$$\boldsymbol{\omega}_* = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}.$$

*В результате получаем следующую формулировку задачи:*

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}.$$

*Начальные условия:*  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \quad (\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}_*^0 + \eta a_* \mathbf{e}).$

# Формальное решение задачи

*Первые интегралы:*

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = a \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = b \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}, \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = H,$$

*Проекция уравнения движения на орт  $\mathbf{k} \times \mathbf{e}' / |\mathbf{k} \times \mathbf{e}'|$ .*

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \nu x^2 + \nu - ab = 0, \quad x = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'. \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu},$$

*После исключения квадрата угловой скорости:*

$$\ddot{x} + 2Hx - 3\nu x^2 + \nu - ab = 0, \quad x = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'.$$

*Примем в качестве базиса векторы  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k} \times \mathbf{e}'$*

*Вектор угловой скорости имеет вид:*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - ax}{1 - x^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{x}}{1 - x^2} \mathbf{k} \times \mathbf{e}' + \frac{a - bx}{1 - x^2} \mathbf{e}'.$$

*Здесь учтено, что  $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}') = -\dot{x}$ .*

# Представление тензора поворота

*Вектор угловой скорости:*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - ax}{1 - x^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{x}}{1 - x^2} \mathbf{k} \times \mathbf{e}' + \frac{a - bx}{1 - x^2} \mathbf{e}'$$

*Эта угловая скорость отвечает тензору поворота:*

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}|} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{\sin \gamma_0}, \quad \cos \gamma_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e},$$

*Кроме того:*  $\mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \sin(\gamma_0 + \vartheta) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = \cos(\gamma_0 + \vartheta) \Rightarrow \gamma = \gamma_0 + \vartheta.$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \dot{\varphi} \mathbf{e}'.$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{b - ax}{1 - x^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{x} \sin \gamma}{1 - x^2} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \frac{a - bx}{1 - x^2} \mathbf{e}'.$$

*Углы нутации, прецессии и собственного вращения:*  $\dot{\vartheta} = -\frac{\dot{x} \sin \gamma}{1 - x^2} = \dot{\gamma},$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{b - a \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a - b \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \Rightarrow \frac{d(\psi + \varphi)}{dt} = \frac{a + b}{1 + \cos \gamma}.$$

# Регулярная прецессия

$$x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}), \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

*Ограничение на начальную угловую скорость:*  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 = \nu.$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi}_0 \mathbf{k} + \dot{\varphi}_0 \mathbf{e} = \dot{\varphi}_0 \left( \mathbf{e} + \frac{\nu}{\dot{\varphi}_0^2} \mathbf{k} \right).$$

*Угловая скорость прецессирует вокруг вертикали:*  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0.$

*Угол между осью тела и вертикалью не может быть произвольным:*

$$\frac{(b - a \cos \gamma)}{\sin^2 \gamma} \frac{(a - b \cos \gamma)}{\sin^2 \gamma} = \nu.$$

# Волчок Лагранжа на подвижном основании (точка $O$ совершает колебания в горизонтальной плоскости)

*В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука. 1988. 328 с.*

**Уравнение движения:**

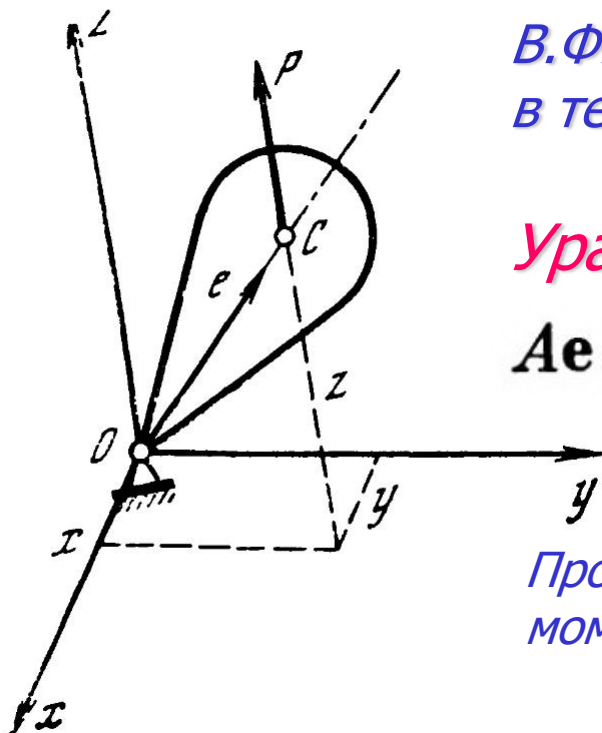
$$\mathbf{A} \mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3.$$

*Проекция кинетического момента на ось симметрии*

*Единичный вектор, направленный по оси симметрии тела*

**A** – *экваториальный момент инерции*

силы:  $\mathbf{F}_1 = P \mathbf{e}_3$  — сила веса (ускорение земного тяготения предполагается направленным вверх);  $\mathbf{F}_2 = a \mathbf{e}_a$  сила инерции переносного движения;  $\mathbf{F}_3 = -\xi \dot{\mathbf{e}}$  — диссипативная сила. Единичные векторы  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}_a$  и  $\mathbf{e}$  определяют соответственно направление вертикали, направление ускорения точки подвеса и положение центра масс  $C$ :



*Первое приближение:*

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{H} P \mathbf{e} \times \mathbf{e}_3 + \frac{1}{H} a \mathbf{e} \times \mathbf{e}_a - \frac{\xi P}{H^2} \mathbf{e} \times [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3]. \quad (61.8)$$

*Второе приближение:*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} = & \frac{1}{H} \mathbf{e} \times (P \mathbf{e}_3 + a \mathbf{e}_a) - \frac{1}{H^2} \mathbf{e} \times [\mathbf{e} \times [\xi P \mathbf{e}_3 + \xi a \mathbf{e}_a + A a \dot{\mathbf{e}}_a]] - \\ & - \frac{1}{H^3} \{ \xi^2 P + A P^2 (\mathbf{e}, \mathbf{e}_3) \} (\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (61.9)$$

*Уравнения (62.8), (61.9) можно рассматривать как уточнение классических уравнений ядерного магнитного резонанса, известных как феноменологические уравнения Блоха.*

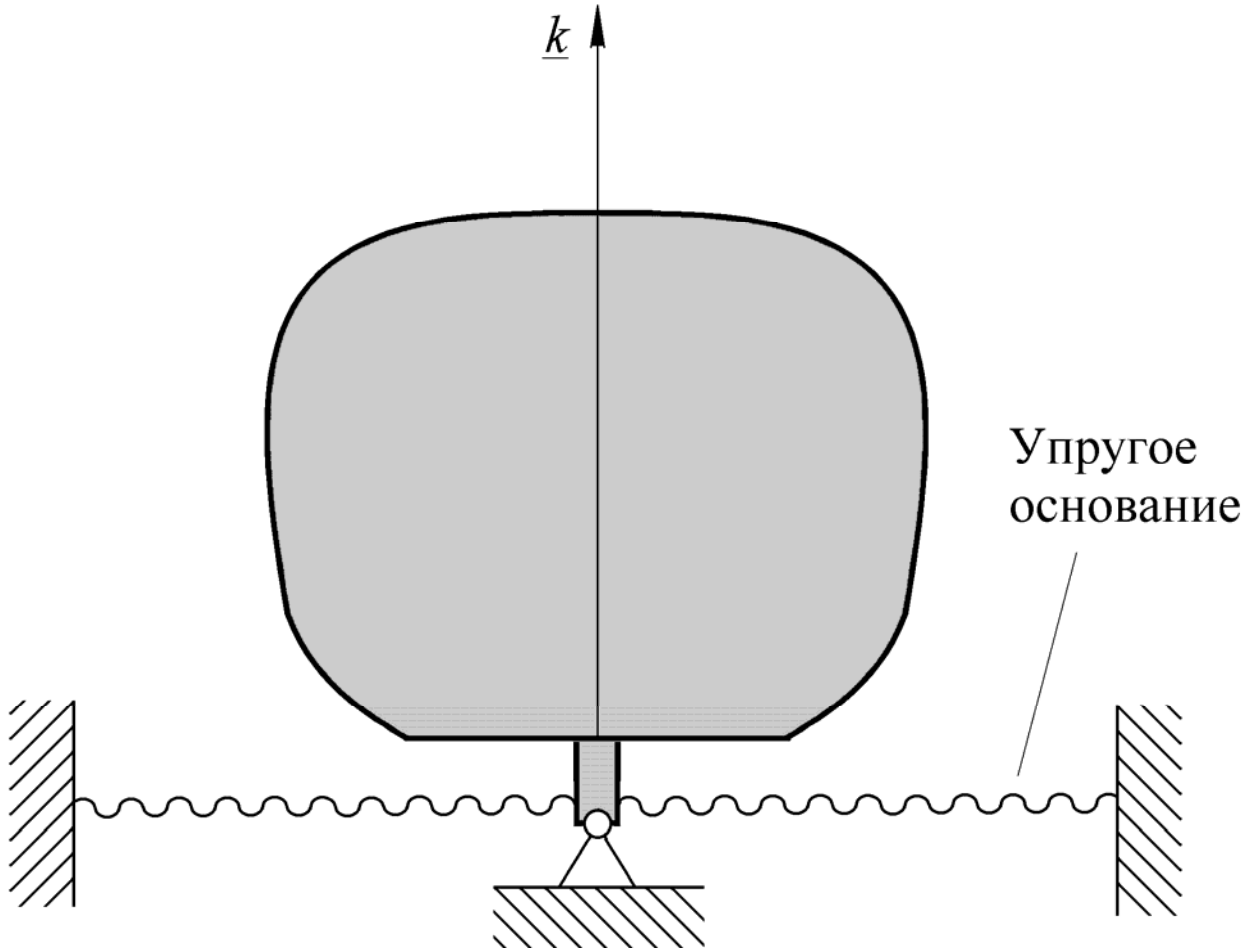
**Различия:** 1) В уравнениях Блоха диссипативные слагаемые выглядят иначе. 2) Уравнения Блоха линейны и имеют одну особую точку (здесь две особые точки). 3) Уравнения Блоха не сохраняют нормы вектора  $\mathbf{e}$ , что определяет их внутреннюю противоречивость.



**Ядерный магнитный резонанс (ЯМР)** — резонансное поглощение электромагнитной энергии веществом, содержащим ядра с ненулевым спином во внешнем магнитном поле, обусловленное переориентацией магнитных моментов ядер.

Одни и те же ядра атомов в различных окружениях в молекуле показывают различные сигналы ЯМР. Отличие такого сигнала ЯМР от сигнала стандартного вещества позволяет определить так называемый химический сдвиг, который обусловлен химическим строением изучаемого вещества. В методиках ЯМР есть много возможностей определять химическое строение веществ, конформации молекул, эффекты взаимного влияния, внутримолекулярные превращения.

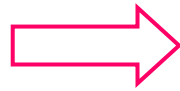
# Твердотельный осциллятор



# Потенциальный момент

*Определение:* момент называется потенциальным, если существует скалярная функция, зависящая от вектора поворота, такая, что

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{U}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}},$$



$$\left( \mathbf{M} + \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

*Это возможно если и только если:*

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega},$$

*Определение:* момент называется позиционным, если он зависит только от вектора поворота. Потенциальный позиционный момент имеет вид:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{dU(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}.$$

*Пример:*

$$U(\boldsymbol{\theta}) = F(\boldsymbol{\theta}^2)$$



$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \frac{dF(\boldsymbol{\theta}^2)}{d(\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta}.$$

# Трансверсально-изотропный потенциал

Если потенциал имеет вид  $U(\theta) = C\mathbf{k} \cdot \theta$ ,  $C = \text{const}$ ,  $\mathbf{k} = \text{const}$ ,  $|\mathbf{k}| = 1$   
момент вычисляется по формуле:

$$\mathbf{M} = -C\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = -C \left( \mathbf{k} + \frac{1}{2}\theta \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2}\theta \times (\theta \times \mathbf{k}) \right)$$

*Определение:* потенциал называется трансверсально-изотропным, если

$$U(\theta) = U[\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \theta]$$

Общая форма трансверсально-изотропного потенциала может быть представлена в виде функции двух аргументов:

$$U(\theta) = F(\mathbf{k} \cdot \theta, \theta^2).$$

Момент, соответствующий трансверсально-изотропному потенциалу:

$$\mathbf{M}(\theta) = -2\frac{\partial F}{\partial(\theta^2)}\theta - \frac{\partial F}{\partial(\mathbf{k} \cdot \theta)}\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k}.$$



$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{M} = 0.$$

# Определение структуры трансверсально-изотропного потенциала

$$U(\theta) = U[\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \theta]$$

Рассмотрим непрерывную последовательность тензоров:  $\mathbf{Q}(\alpha(\tau) \mathbf{k})$ .



$$\frac{d}{d\tau} U(\mathbf{Q} \cdot \theta) = 0 \Rightarrow \frac{dU}{d\theta'} \cdot \frac{d}{d\tau} \theta' = 0, \quad \theta' = \mathbf{Q}(\alpha(\tau) \mathbf{k}) \cdot \theta.$$

Примем во внимание уравнение Пуассона:

$$\frac{d}{d\tau} \theta' = \frac{d\alpha}{d\tau} \mathbf{k} \times \theta'.$$

$$\alpha(0) = 0, \quad [d\alpha(\tau)/d\tau]_{\tau=0} \neq 0$$

Подставив в , получим:

$$\frac{dU}{d\theta} \cdot (\mathbf{k} \times \theta) = 0 \Rightarrow \frac{dU}{d\theta} = \varphi \mathbf{k} + \psi \theta,$$

$$dU = \frac{dU}{d\theta} \cdot d\theta = \varphi d(\mathbf{k} \cdot \theta) + \frac{1}{2} \psi d(\theta^2).$$

$$U(\theta) = F(\mathbf{k} \cdot \theta, \theta^2).$$

# Уравнения движения твердотельного осциллятора

Тензор инерции:  $\mathbf{A}^{(t)} = A_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}') + A_3 \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}.$

Кинетический момент:  $\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = A_1 \boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}',$

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P} \cdot [A_1 \boldsymbol{\Omega} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}].$$

Внешний момент:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_{\text{ext}},$$

Реакция  
упругого  
основания

Дополнительный  
внешний момент

$$\mathbf{M}_e = -\mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{U}(\theta)}{d\theta},$$

Реакция упругого основания

Упругое основание считается трансверсально-изотропным:

$$\mathbf{M}_e(\theta) = -C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \theta) \theta - D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \theta) \mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \mathbf{k},$$

Внешний момент:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \frac{dV(\theta)}{d\theta} + \mathbf{M}_{\text{ex}},$$

*Формулировка задачи с использованием левой угловой скорости:*

$$[\mathbf{P}(\theta) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(\theta) \cdot \boldsymbol{\omega}]' + \mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \frac{d(\mathbf{U} + \mathbf{V})}{d\theta} = \mathbf{M}_{\text{ex.}}$$

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega})$$

*Формулировка задачи с использованием правой угловой скорости:*

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \frac{d(\mathbf{U} + \mathbf{V})}{d\theta} = \mathbf{P}^T(\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{ex.}}$$

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}),$$

---

*Обозначения:*  $\mathbf{Z}(\theta) = \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2}\mathbf{R}^2,$   $\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E},$

↑  
Тензор-интегратор

↗  
Логарифмический  
тензор поворота

$$g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}.$$

# Парадокс Николаи

*Внешний момент:*  $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = M\mathbf{k}' = M\mathbf{P}(\theta) \cdot \mathbf{k}, \quad M = \text{const},$

*Уравнение движения:*

$$A_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \mathbf{k} - (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + \\ + C\theta + D\mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{k} = M\mathbf{k},$$

*Здесь*  $C = 2 \frac{\partial}{\partial (\theta^2)} U(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \theta), \quad D = \frac{\partial}{\partial (\mathbf{k} \cdot \theta)} U(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \theta).$

*Равновесное положение:*

$$\theta = \theta \mathbf{k}, \quad \dot{\theta} = \text{const}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}.$$

*Подставив в уравнение движения, получим:*

$$C(\theta^2, \theta) \theta + D(\theta^2, \theta) = M.$$

*В линейной постановке задачи (физическая линейность):*

$$C(\theta^2, \theta) = c, \quad D(\theta^2, \theta) = (d - c) \mathbf{k} \cdot \theta \implies \theta = M\mathbf{k}/d.$$



## Исследование устойчивости решения

$$C(\theta^2, \theta) = c, D(\theta^2, \theta) = (d - c) \mathbf{k} \cdot \theta \implies \theta = M\mathbf{k}/d.$$

*Возмущенные величины:*  $\theta_\varepsilon = \theta_0 \mathbf{k} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), \quad \theta_0 = M/d.$

*Подставив в уравнения движения, получим:*

$$A_1 \dot{\boldsymbol{\eta}} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{k} + c \boldsymbol{\varphi} + (d - c) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} + \\ + M \left(1 - \frac{c}{d}\right) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1-g}{\theta_0} (\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k})\right) = 0,$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \frac{M}{d} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta} - (1-g) (\boldsymbol{\eta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{k}).$$

*Задача распадается на задачу кручения и задачу изгиба. Введем обозначения*

$$\boldsymbol{\eta} = \zeta \mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \boldsymbol{\varphi} = \gamma \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

*Исключив  $\zeta$  и  $\gamma$ , получим:*

$$A_3 \ddot{\gamma} + d\gamma = 0, \quad g = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}, \quad \theta_0 = \frac{M}{d}.$$

$$A_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left( c \left( g^2 + \frac{M^2}{4d^2} \right) - \frac{M^2}{4d} + (1-g)gd \right) \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = 0,$$

*Рассмотрим уравнение*

$$A_1 \ddot{\psi} + \left( c \left( g^2 + \frac{M^2}{4d^2} \right) - \frac{M^2}{4d} + (1-g)gd \right) \psi + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \psi = 0,$$

*Если  $|M|/d \ll 1$ , то это уравнение можно записать так:*

$$A_1 \ddot{\psi} + \left( c + \frac{(c-2d)M^2}{12d^2} \right) \psi + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \psi = 0.$$

*Решение ищем в виде:*  $\psi = \mathbf{a} \exp(pt)$ ,  $\mathbf{a} = \text{const}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$ .



$$\left( \left( A_1 p^2 + c + \frac{(c-2d)M^2}{12d^2} \right) \mathbf{E}_* + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_* \right) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}.$$

*Это уравнение имеет форму:*

$$\mathbf{A} \cdot \psi = 0, \quad \mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}_* + \mu \mathbf{k} \times \mathbf{E}_*, \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad \psi \cdot \mathbf{k} = 0,$$

*где*  $\lambda = A_1 p^2 + c + \frac{(c-2d)M^2}{12d^2}$ ,  $\mu = \frac{M}{2}$ .

*Нетрудно видеть, что*  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $\det \mathbf{A} = 0$ .

*Таким образом,  
важен только  
определитель в  
плоскости.*

Вычислим плоский определитель тензора  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}_* + \mu \mathbf{k} \times \mathbf{E}_*$

$$\text{Det} \mathbf{A} = \frac{1}{2} \left( (\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2 \right) = \frac{1}{2} (4\lambda^2 - 2\lambda^2 + \mu^2) = \lambda^2 + \mu^2.$$

Приняв во внимание, что  $\lambda = A_1 p^2 + c + \frac{(c - 2d) M^2}{12d^2}$ ,  $\mu = \frac{M}{2}$ .

получаем условие существования нетривиального решения:

$$\left( A_1 p^2 + c + \frac{(c - 2d) M^2}{12d^2} \right)^2 + \frac{M^2}{4} = 0.$$

Решение уравнения имеет вид:

$$\psi = \sum_{k=1}^4 \mathbf{a}_k \exp(\mathbf{p}_k t), \quad \mathbf{a}_k = \text{const}, \quad \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{k} = 0,$$

- Легко видеть, что хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть. Это приводит к возрастанию решения уравнения.
- **Положение равновесия получается неустойчивым при наличии бесконечно малого крутящего момента. Этот факт известен как парадокс Николаи.**

## Модифицированная постановка задачи

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = \gamma M (l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}), \quad \gamma = (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})^{-\frac{1}{2}}$$

*Задача формулируется через левую и правую угловые скорости, а затем путем вычитания уравнений, содержащих  $\boldsymbol{\Omega}$ , из уравнений, содержащих  $\boldsymbol{\omega}$ , приводится к виду*

$$\begin{aligned} & [A_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) + (A_3 - A_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}' - \mathbf{k})]' + \\ & + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = \gamma M [(l_1 - l_2) \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}' - l_1 \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k}]. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-T}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = 2 \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

*Решение:*  $\boldsymbol{\theta} = x\mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \theta^2 = x^2 + y^2, \quad \mathbf{y} = y(t) \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m},$   
 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad |\mathbf{m}| = 1.$

*Можно доказать, что*

$$\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}) = \dot{\psi} y^2, \quad 1 - \cos \vartheta = \frac{y^2 (1 - \cos \theta)}{\theta^2}.$$

*Спроецируем уравнение движения*

$$\left[ A_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) + (A_3 - A_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right]' + \\ + (A_3 - A_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + D\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = \gamma M \left[ (l_1 - l_2) \mathbf{k} + l_2 \mathbf{k}' - l_1 \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{k} \right].$$

*на вертикальную ось. В результате получим*

$$\left[ A_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{k} + (A_1 - A_3) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} (1 - \cos \vartheta) \right]' = \gamma M (l_1 - l_2) (1 - \cos \vartheta),$$

*Приняв во внимание полученные выше результаты, это уравнение можно привести к виду:*

$$\left[ (1 - \cos \vartheta) F \right]' = \gamma M (l_1 - l_2) (1 - \cos \vartheta), \quad F \equiv 2A_1 \dot{\psi} + (A_1 - A_3) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

- *Правая часть этого уравнения имеет постоянный знак, который зависит от знака  $M (l_1 - l_2)$ .*
- *Допустим, что  $M (l_1 - l_2) > 0$ . Выберем нач. усл. так, чтобы  $F|_{t=0} > 0$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  функция  $F(t)$ , согласно уравнению, будет стремиться к бесконечности. Скорость прецессии  $\dot{\psi}$  также будет возрастать.*
- ***Таким образом, при наличии бесконечно малого крутящего момента положение равновесия будет неустойчивым. Парадокс Николаи имеет место.***

## Регулярная прецессия твердотельного осциллятора

$$[A_1 \boldsymbol{\omega} + (A_3 - A_1) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}'] + C \boldsymbol{\theta} + D \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k};$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}),$$

$$C = 2 \frac{\partial}{\partial (\theta^2)} U (\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}), \quad D = \frac{\partial}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} U (\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}).$$

*Задача допускает следующее решение:*

$$\boldsymbol{\theta} = \vartheta \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}'),$$

$$\dot{\vartheta} = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}.$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi} [(1 - \cos \vartheta) \mathbf{k} + \sin \vartheta \mathbf{k} \times \mathbf{p}] = \text{const}.$$

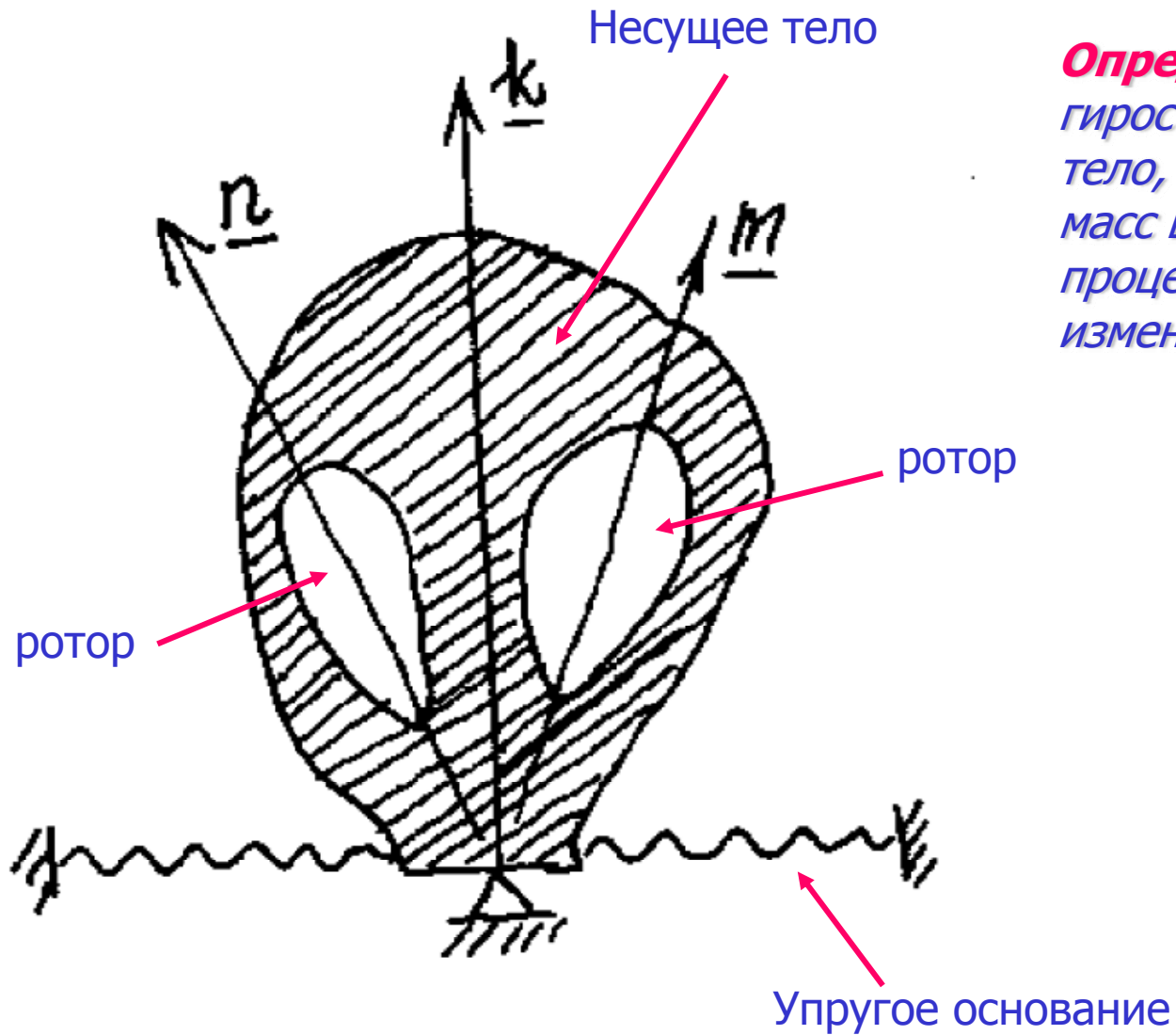
*Примем ограничение, которое выполняется для большинства видов упругой энергии:*

$$D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}=0} = \frac{\partial}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} U(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}=0} = 0,$$

*Тогда получается следующее выражение для скорости прецессии*

$$\dot{\psi}^2 = \frac{C(\vartheta^2, 0) \vartheta}{\sin \vartheta [A_3 (1 - \cos \vartheta) + A_1 \cos \vartheta]}.$$

# Двухроторный гириостат



## **Определение:**

*гириостатом называется тело, распределение масс в котором в процессе движения не изменяется*

# Кинетический момент двухроторного гиростата

*Тензор инерции несущего тела:*  $A^t = P(t) \cdot A \cdot P^T(t)$

*Тензоры инерции роторов:*  $B^t = P_b(t) \cdot B \cdot P_b^T(t)$ ,  $C^t = P_c(t) \cdot C \cdot P_c^T(t)$ ,

$$B = \lambda_b m \otimes m + \mu_b (E - m \otimes m) \quad C = \lambda_c n \otimes n + \mu_c (E - n \otimes n)$$

*Тензор поворота несущего тела:*

$$P = Q(\psi m) \cdot Q(\vartheta e) \cdot Q(\varphi m) = Q(\vartheta e') \cdot Q((\varphi - \psi)m)$$

$$e' = Q(\psi m) \cdot e \quad e' \cdot m = m \cdot e = 0$$

*Тензоры поворота и угловые скорости роторов:*

$$P_b(t) = P(t) \cdot Q(\alpha m) \quad \omega_b = \omega + \dot{\alpha} m' \quad m' = P(t) \cdot m$$

$$P_c(t) = P(t) \cdot Q(\beta n) \quad \omega_c = \omega + \dot{\beta} n' \quad n' = P(t) \cdot n$$

***Кинетический момент гиростата:***

$$K = A^t \cdot \omega + B^t \cdot \omega_b + C^t \cdot \omega_c$$



# Уравнения движения гиростата

*Кинетический момент гиростата можно преобразовать к виду:*

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \left( \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \right)$$

*Здесь*  $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$  *- тензор инерции гиростата,*  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}$ ,

***Второй закон динамики:***

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

$\mathbf{M}_{\text{ext}}$  *- внешний момент*

*Запишем кинетический момент в виде:*

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \quad \mathbf{J} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n}$$

*Тогда второй закон динамики принимает вид:*

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

# Внешний момент, действующий на гириостат

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^{-\top}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d(\Pi(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}))}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{\text{ex}}$$

*Потенциальная энергия  
упругого основания*

*Потенциал  
внешнего момента*

*Непотенциальная часть  
внешнего момента*

Упругое основание – трансверсально-изотропное:

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \Pi(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$$

*Упругий момент:*

$$-\mathbf{M}_e = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-\top} \cdot \mathbf{k}$$

*Если кроме упругого момента на гириостат ничего не действует, уравнение движения принимает вид:*

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

# Уравнения движения роторов

*Кинетический момент ротора:*  $\mathbf{K}_b = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\alpha} \mathbf{m})$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_b &= (\mu_b \mathbf{E} + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' \otimes \mathbf{m}') \cdot (\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha} \mathbf{m}') = \\ &= \mu_b (\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha} \mathbf{m}') + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' (\mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}.$$

***Второй закон динамики:***

$$\dot{\mathbf{K}}_b = \mathbf{M}_{\text{дв}} + \mathbf{M}_{\text{аб}},$$

*Момент двигателя*

*Момент, действующий со стороны несущего тела*

*Момент двигателя направлен по оси ротора. Момент, действующий со стороны несущего тела, ортогонален оси ротора.*

$$\mathbf{M}_{\text{дв}} = M_{\text{дв}} \mathbf{m}' \quad \mathbf{M}_{\text{аб}} \cdot \mathbf{m}' = 0$$

**Для второго ротора – аналогичные формулы.**

*Проекция уравнения движения ротора на ось симметрии:*

$$\lambda_b(\dot{\alpha} + \omega_m) = M_{\text{ДВ}} \quad \omega_m = \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

*Момент двигателя:*

$$M_{\text{ДВ}} = -\eta_b(\dot{\alpha} - \omega_b) \quad \eta_b > 0,$$

Номинальная угловая скорость

Для второго ротора – аналогично.

### *Уравнения движения роторов*

$$\lambda_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_m = 0 \quad \omega_b = \text{const}$$

$$\lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \eta_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \dot{\omega}_n = 0 \quad \omega_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

*Если двигатели имеют бесконечную мощность, то*

$$\eta_b \rightarrow \infty \quad \eta_c \rightarrow \infty \quad \implies \quad \dot{\alpha} = \omega_b \quad \dot{\beta} = \omega_c$$

# Полная система уравнений движения двухроторного гиростата на упругом основании

*Второй закон динамики для гиростата:*

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{Z}^{-1} \cdot \frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

*Кинематическое соотношение:*

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)},$$

*Уравнения движения роторов:*

$$\lambda_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_m = 0 \quad \omega_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

$$\lambda_c (\dot{\beta} - \omega_c) + \eta_c (\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \dot{\omega}_n = 0 \quad \omega_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

*Потенциальную энергию упругого основания можно принять в форме:*

$$\Pi(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \theta) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \theta)^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \theta)^2$$

*Тогда упругий момент вычисляется по формуле:*

$$\mathbf{M}_e = -C_1 \theta - (C_3 - C_1) \mathbf{k} \cdot \theta \mathbf{Z}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{k}, \quad C_1 > 0, C_3 > 0$$

*Это уравнение является нелинейным:*

$$\mathbf{M}_e = -C_1 \theta - (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \theta) \left( \mathbf{k} - \frac{1}{2} \theta \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2} \theta \times (\theta \times \mathbf{k}) \right)$$

*Линеаризация:*

$$\mathbf{M}_e = -C_1 (\theta - \mathbf{k} \cdot \theta \mathbf{k}) - C_3 (\mathbf{k} \cdot \theta) \mathbf{k}$$

*Жесткость на изгиб*

*Жесткость на кручение*

# Уравнения движения при малых поворотах несущего тела

$$|\boldsymbol{\theta}| \ll 1 \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

*Упругий момент:*

$$\mathbf{M}_e = -C_1(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{k}) - C_3(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k}$$

*Уравнение движения гиростата:*

$$\mathbf{D} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \lambda_b \ddot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \ddot{\beta} \mathbf{n} + C_1(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \mathbf{k}) + C_3(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

*Уравнения движения роторов:*

$$\lambda_b(\dot{\alpha} - \omega_b)' + \eta_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \mathbf{m} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0$$

$$\lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c)' + \eta_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0$$

# Динамика однородного гиригоста на упругом основании

## Упрощающие предположения:

*Первое.* Тензор инерции несущего тела  $A$  будем считать трансверсально изотропным с осью изотропии, направленной по вектору  $\mathbf{k}$

$$A = \lambda_a \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu_a (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \quad (3.1.1)$$

От этого предположения в дальнейшем мы откажемся и рассмотрим ситуацию, когда тензор инерции  $A$  будет близок к выражению (3.1.1), но перестанет обладать осью симметрии.

*Второе.* Считаем, что ротор  $C$  отсутствует, но полость, занимаемая ротором  $C$ , заполнена материалом несущего тела  $A$ .

*Третье.* Считаем, что ось ротора  $B$  в исходном натуральном состоянии совпадает с осью симметрии несущего тела  $A$ :  $\mathbf{m} = \mathbf{k}$ .

*Четвертое.* Для энергии упругого основания считаем справедливым выражение

$$\Pi(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2$$

*Суммарный тензор инерции:*

$$D = \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_b \quad \mu = \mu_a + \mu_b$$

*Кинетический момент (правый):*

$$J = \mu \boldsymbol{\Omega} + ((\lambda - \mu) \omega_{\mathbf{k}} + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} \quad \omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$



### *Уравнения движения:*

$$\mu \mathbf{\Omega} + ((\lambda - \mu) \omega_k + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} - ((\lambda - \mu) \omega_k + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} \times \mathbf{\Omega} + \\ + c_1 \boldsymbol{\theta} + (c_3 - c_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega}) \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)},$$

$$\lambda_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \eta_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_k = 0 \quad \omega_k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}$$

### *Начальные условия:*

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0 \quad \alpha = \alpha_0$$

Полученная задача Коши оказывается сильно нелинейной и достаточно сложна для аналитического решения в общем случае. Традиционные методы анализа здесь не подходят, т. к. система существенно неконсервативна. Подвод или отвод энергии в этой системе осуществляется электрическим путем.

# Крутильно-вращательные движения гиростата

**Нелинейная система допускает частное решение.**

- Несущее тело совершает чисто крутильные колебания вокруг своей оси симметрии.
- Тогда ротор будет совершать крутильно-вращательное движение.
- Для центрифуги это нормальный рабочий режим движения, а все прочие движения являются паразитными и нежелательными.

$$\theta = \theta(t)\mathbf{k} \quad \mathbf{k} = \text{const} \quad \mathbf{Z}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \quad \omega = \Omega = \dot{\theta}\mathbf{k}$$

Кинетический момент:  $\mathbf{J} = (\lambda\dot{\theta} + \lambda_b\dot{\alpha})\mathbf{k} \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv \dot{\theta}$

**Уравнения движения:**

$$(\lambda\dot{\theta} + \lambda_b\dot{\alpha})' + c_3\theta = 0 \quad \lambda_b\dot{\alpha} + \eta_b\alpha + \lambda_b\ddot{\theta} = 0 \quad \dot{\alpha} = \omega_b + \dot{\theta}$$

Решение ищем в виде:  $\theta = Ae^{pt} \quad \alpha = Be^{pt}$

Характеристическое уравнение:

$$\mathcal{F}(p) \equiv \lambda_b\lambda_a p^3 + \lambda\eta_b p^2 + c_3\lambda_b p + c_3\eta_b = 0$$

Можно исследовать устойчивость стандартными методами.

# Движения гири с неуравновешенным ротором при малых углах поворота несущего тела

*Вектор кинетического момента:*

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b$$

где

$$\mathbf{C} = Ml^2(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}),$$

причем  $\mathbf{n}$  является ортом вектора, направленного от неподвижного ротора, к сосредоточенному грузу,  $l$  есть расстояние от неподвижной точки до дисбаланса. Считаем, что вектор  $\mathbf{n}$  мало отличается от вектора  $\mathbf{k}$ . Представим вектор  $l\mathbf{n}$  в виде

$$l\mathbf{n} = l_1\mathbf{k} + l_2\boldsymbol{\delta} \quad l_1^2 + l_2^2 = l^2 \quad |\boldsymbol{\delta}| = 1 \quad l_2^2 \ll l_1^2$$

*Кинематические соотношения:*

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \quad \boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \gamma\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \boldsymbol{\omega}_b = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\alpha}\mathbf{k} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}$$

## Линейное приближение

*Обозначения:*  $\mathbf{n} = l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{m}$      $\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0$      $l_1 = \cos u$      $l_2 = \sin u$ ,  
где  $u$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ ,  $|u| \ll 1$ .

*Кинетический момент в линейном приближении:*

$$\mathbf{K} = \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} + \mu \dot{\gamma} + \lambda \dot{y} \mathbf{k} - \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} - u \dot{\alpha} M l^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m},$$

*Считаем, что двигатель имеет неограниченную мощность:*

$$\dot{\alpha} = \omega_b = \text{const} \quad \alpha = \omega_b t$$

*Второй закон динамики:*

$$\dot{\mathbf{K}} + c_1 \boldsymbol{\gamma} + c_3 y \mathbf{k} = 0$$

или в проекциях на ось  $\mathbf{k}$  и плоскость, ортогональную  $\mathbf{k}$ ,

$$\mu \ddot{\gamma} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + c_1 \boldsymbol{\gamma} = u M l^2 \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}),$$

$$\lambda \ddot{y} + c_3 y = 0$$

## Решение линейной задачи

$$y = y_0 \cos pt + \frac{\dot{y}_0}{p} \sin pt \quad p = \sqrt{c_3/\lambda}$$

$$\gamma = \mathbf{Q}(p_1 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}(p_2 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b t \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m})$$

где величины  $p_1$  и  $p_2$  определены выражением

$$p_{1,2} = \frac{\lambda_b \omega_b \pm \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4c_1 \mu}}{2\mu}$$

*Постоянные векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  определяются по начальным условиям:*

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{k} \times \mathbf{m} = \gamma_0,$$

$$p_1 \mathbf{k} \times \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{k} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{k} \times \frac{u M l^2 \omega_b^2}{c_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) = \dot{\gamma}_0$$

## Траектории апекса ротора

Вектор, определяющий траекторию апекса:  $\mathbf{R}_a = l(\mathbf{k} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)$

Проекция траектории апекса на плоскость, ортогональную вектору  $\mathbf{k}$

$$x = \vartheta \sin \psi = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} (p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t),$$

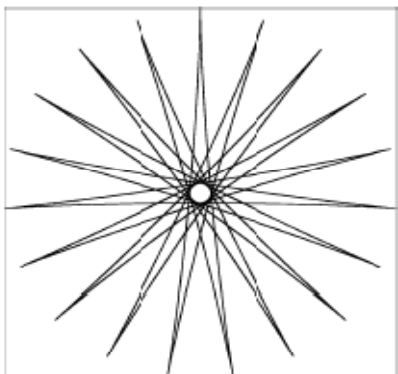
$$y = -\vartheta \cos \psi = -\frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} (p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t)$$

Обозначения: 
$$p_{1,2} = \frac{\lambda_b \omega_b \pm \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4c_1 \mu}}{2\mu}$$

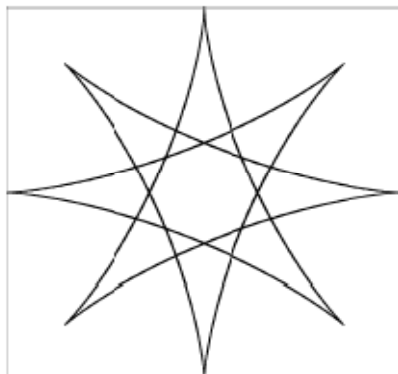
$$p_2 = -p_1(1 - \varepsilon) \quad \varepsilon = \frac{p_1 + p_2}{p_1} = \frac{2\lambda_b \omega_b}{\lambda_b \omega_b + \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4c_1 \mu}}$$

$$\lambda_b = 350 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 \quad \mu = 300 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 \quad c_1 = 17500 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

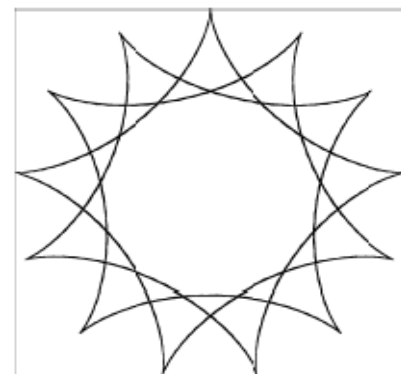
$$500 \text{ об/мин} < \omega_b < 5000 \text{ об/мин.} \quad \omega_b = 100 \text{ рад/сек.} \quad \varepsilon \simeq 0.25$$



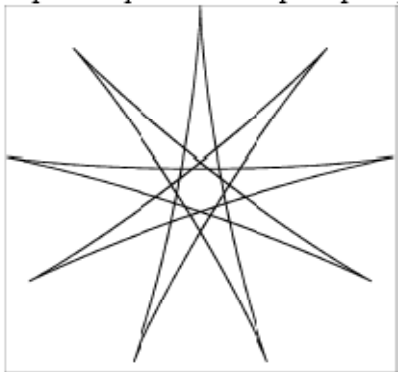
⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.1$



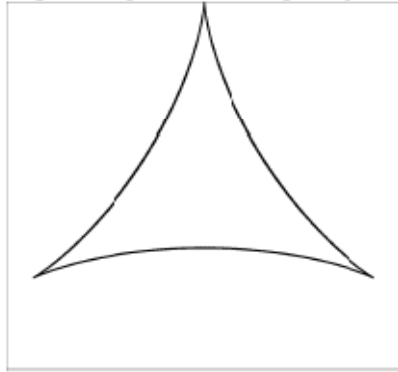
⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.4$



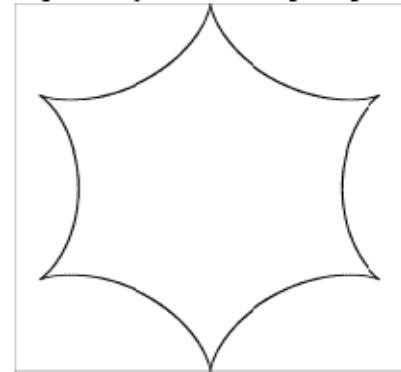
⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.7$



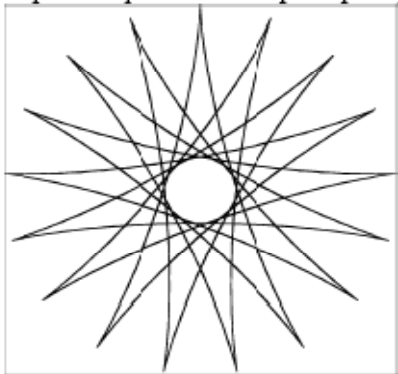
⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.2$



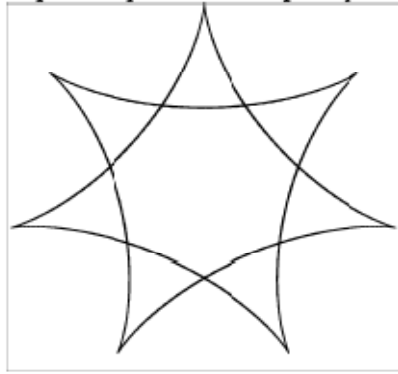
⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.5$



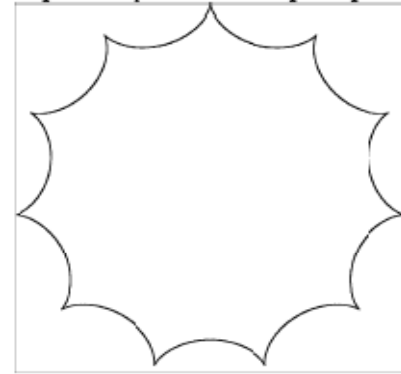
⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.8$



⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.3$

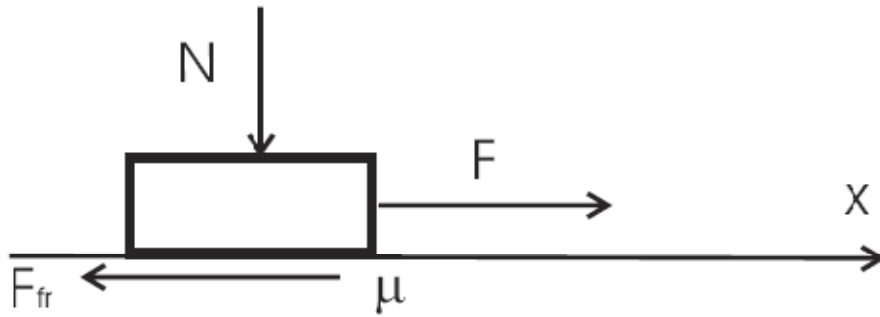


⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.6$



⋮ Траектория апекса ротора при  $\varepsilon = 0.9$

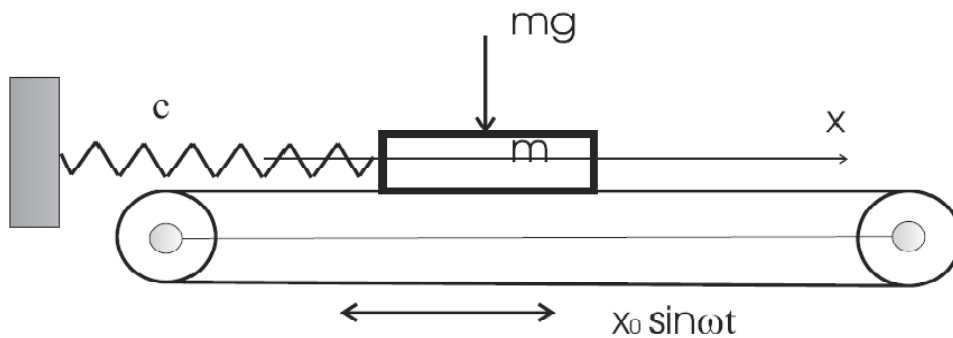
# Модель трения Кулона



$$F_{fr} = -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}, \quad \text{if } \dot{x} \neq 0,$$

*Так обычно пишут в учебниках*

*Твердое тело на вибротранспортере:*



*Решение этой задачи не соответствует реальному движению.*

*Постановка задачи:*

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sign} (\dot{x} - x_0 \omega \cos \omega t) = 0.$$
$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$



# Общая формулировка закона трения Кулона

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{if } \dot{x} \neq 0, \\ f_{\text{st}}, |f_{\text{st}}| \leq \mu N & \text{if } \dot{x} = 0, \end{cases}$$

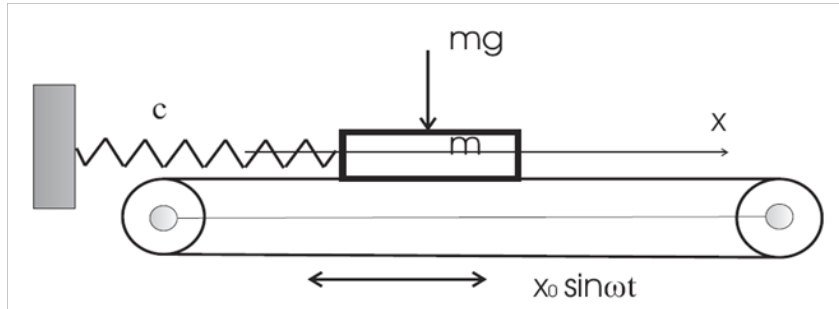
*Более точная формулировка:*

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{if } \tau^2 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \neq 0, \\ f_{\text{st}}, |f_{\text{st}}| \leq \mu N & \text{if } \tau^2 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 = 0, \end{cases}$$

*При двухстороннем контакте:*

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} -(\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2) \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{if } \tau^2 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \neq 0, \\ f_{\text{st}}, |f_{\text{st}}| \leq \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2, & \text{if } \tau^2 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 = 0, \end{cases}, \quad \begin{array}{l} N_1 \geq 0, \\ N_2 \geq 0, \end{array}$$

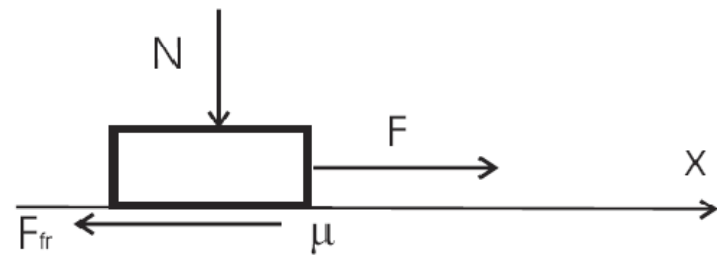
*Точная постановка задачи о твердом теле на вибротранспортере:*



**Главная проблема:**  
*разрывные решения*

$$m\ddot{x} - F_{fr} = 0, \quad y = x - x_0 \sin \omega t, \quad t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

$$F_{fr} = \begin{cases} -\mu mg \operatorname{sign} \dot{y}, & \text{if } \tau^2 \ddot{y}^2 + \dot{y}^2 \neq 0, \\ f_{st}, |f_{st}| \leq \mu mg & \text{if } \tau^2 \ddot{y}^2 + \dot{y}^2 = 0. \end{cases}$$



*Если сила F отсутствует:*

$$m\ddot{x} - F_{fr} = 0$$

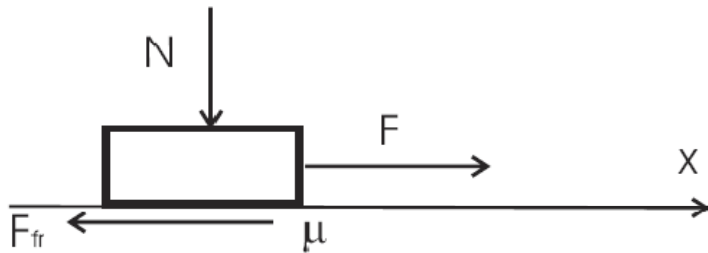
$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v.$$

$$a) \dot{x}_1 = \begin{cases} v - \mu N t / m, & 0 < t < \tau_{cl}, \\ 0, & \tau_{cl} \leq t. \end{cases}, \quad b) \dot{x}_2 = \begin{cases} v, & t = 0, \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

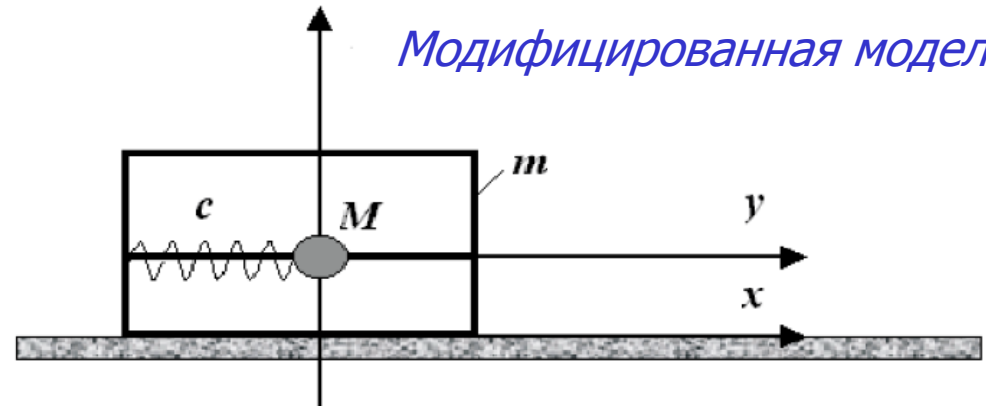
$$\tau_{cl} \doteq m v / \mu N,$$

# Мгновенная остановка тела конечной массы

Исходная модель



Модифицированная модель



Формулировка задачи для модифицированной модели:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x - y) = F/m, \quad \ddot{y} + \omega^2 (y - x) = 0$$

Решение сформулированной задачи:

$$x = vt - \frac{1}{2} \mu g t^2 - \frac{M}{m} \frac{\mu g}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t),$$

$$y = vt - \frac{1}{2} \mu g t^2 + \frac{\mu g}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t),$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \omega^2 = c \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right).$$

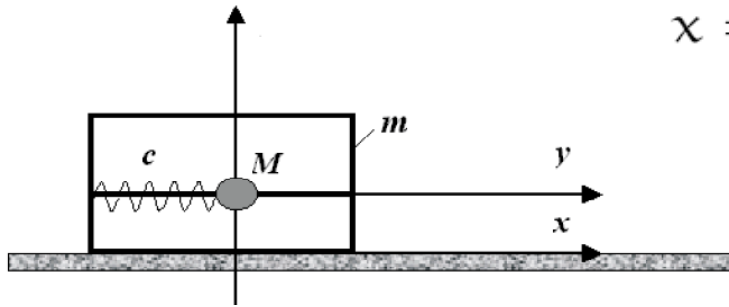
Это решение справедливо для таких  $t$ , при которых

$$\dot{x} = v - \mu g t - \frac{M}{m} \frac{\mu g}{\Omega} \sin \Omega t > 0.$$

Момент остановки находится из условия:

$$v - \mu g \tau - \frac{M}{m} \frac{\mu g}{\Omega} \sin \Omega \tau = 0.$$

*Модель твердого тела:*  $c \rightarrow \infty$ .  $\Omega \rightarrow \infty$ .



$$x = y = vt - \frac{1}{2} \mu g t^2, \quad t < \tau_{cl} \equiv \frac{v}{\mu g},$$

$$\tau_{cl} \doteq mv / \mu N, \quad \text{- классическое время остановки}$$

*Смысл первого решения классической задачи – предельный случай  $c \rightarrow \infty$ .*

*Модель с рамой малой массы:*  $m \ll M$

*Если  $m \rightarrow 0$ , то  $\Omega \rightarrow \infty$  и при этом  $m\Omega^2 \rightarrow c$ .*

*Предположим, что  $\Omega\tau_* \ll 1$ . Тогда время остановки вычисляется так:*

$$\tau_* = \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g} \simeq \frac{m}{M} \tau_{cl} \ll \tau_{cl}.$$

*Неравенство  $\Omega\tau_* = \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{\frac{c}{M}} \frac{v}{\mu g} \ll 1$  выполняется, если  $m \ll M$ .*

Для малых интервалов времени  $t < \tau_*$  решение имеет вид:

$$x = vt - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \mu g t^2,$$

Положение рамки

$$y = vt.$$

Положение центра масс

$$\tau_* = \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g} \simeq \frac{m}{M} \tau_{cl} \ll \tau_{cl}.$$

Становится понятным смысл второго решения классической задачи:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \dot{x}(t, c, m) = \begin{cases} v, & \text{if } t = 0, \\ 0, & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

Движение центра масс:

$$y = vt - \frac{1}{2} \mu g t^2 + \frac{\mu g}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t),$$



$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \omega^2 = c \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right).$$

$$y = \frac{v}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega^2 = \frac{c}{M}, \quad t \geq 0.$$

Это решение справедливо если сила упругости пружины меньше  $\mu M g$

Сила упругости пружины меньше  $\mu Mg$

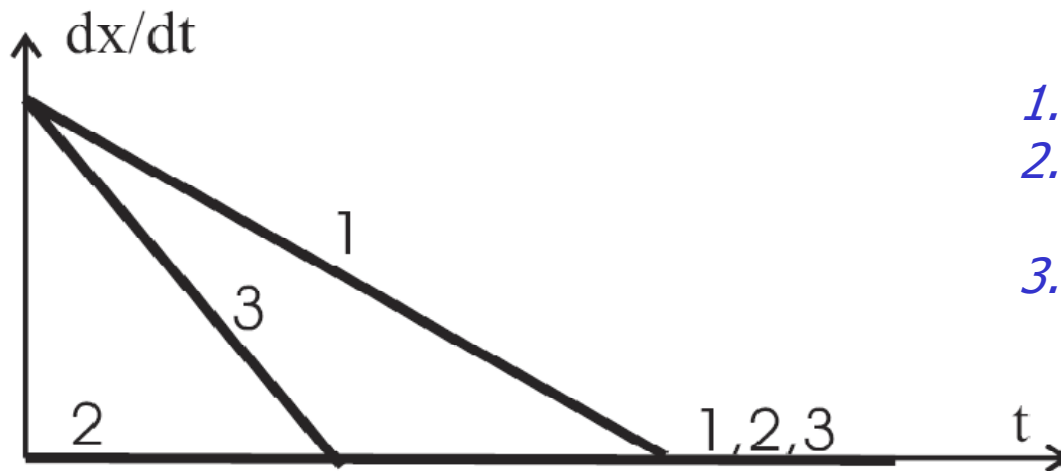
$$|c y(t)|_{\max} \leq \mu (m + M) g \approx \mu Mg.$$

Это условие выполняется в любой момент времени, если начальная скорость удовлетворяет неравенству:

$$|v| \leq \mu g \sqrt{\frac{M}{c}}, \quad v_c = \mu g \sqrt{\frac{M}{c}},$$

↑  
Критическая скорость

Если это условие не выполняется, надо найти интервал времени, когда построенное решение справедливо, а затем решать задачу Коши с новыми начальными условиями.



1. - классическое решение
2. - случай безынерционной рамки
3. - случай  $m \ll M$